MỤC LỤC

PHẦN 1 – PHƯƠNG TRÌNH & BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A – PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN



I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Phương trình – Bất phương trình căn thức cơ bản

① $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$.

② $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$.

③ $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases} \end{array}\right.$.

④ $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A \geq 0 \\ A < B^2 \end{cases}$.

⑤ $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$.

✪ Lưu ý

Đối với những phương trình, bất phương trình căn thức không có dạng chuẩn như trên, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Đặt điều kiện cho căn thức có nghĩa.

Bước 2. Chuyển vế sao cho hai vế đều không âm.

Bước 3. Bình phương cả hai vế để khử căn thức.

2/ Phương trình – Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

① $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{cases}$.

② $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$.

③ $|A| > |B| \Leftrightarrow (A - B)(A + B) > 0$.

④ $|A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A < B \\ A > -B \end{cases}$.

⑤ $|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B < 0 \\ A \text{ có nghĩa} \end{cases} \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A < -B \\ A > B \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$.

✪ Lưu ý

Đối với những phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối không có dạng chuẩn như trên, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc phương pháp chia khoảng để giải.

3/ Một số phương trình – Bất phương trình cơ bản thường gặp khác

Dạng 1. $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C} \quad (1)$

- Ta có: $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)^3 = C \Leftrightarrow A+B+3\sqrt[3]{AB}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=C \quad (2)$
- Thay $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ vào (2) ta được: $A+B+3\sqrt[3]{ABC}=C$.

Dạng 2. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$ với $\left[\begin{array}{l} f(x)+h(x)=g(x)+k(x) \\ f(x).h(x)=g(x).k(x) \end{array}\right.$.

- Biến đổi về dạng: $\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{g(x)}-\sqrt{k(x)}$.
- Bình phương, giải phương trình hệ quả.

✪ Lưu ý

Phương pháp biến đổi trong cả hai dạng là đưa về phương trình hệ quả. Do đó, để đảm bảo rằng không xuất hiện nghiệm ngoại lai của phương trình, ta nên thay thế kết quả vào phương trình đầu đề bài nhằm nhận, loại nghiệm chính xác.

II – CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1. Giải phương trình: $\sqrt{-x^2+4x-3}=2x-5 \quad (*)$

Trích đề thi Cao đẳng sư phạm Nhà Trẻ – Mẫu Giáo TW1 năm 2004

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \ge 0 \\ -x^2+4x-3=(2x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{5}{2} \\ 5x^2-24x+28=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{14}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{14}{5}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{14}{5}$.

Thí dụ 2. Giải phương trình: $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2} \quad (*)$

Đề thi thử Đại học năm 2010 – THPT Thuận Thành – Bắc Ninh

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \ge 0 \\ 7-x^2+x\sqrt{x+5}=3-2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ \sqrt{x+5}=-\dfrac{x+2}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ -\dfrac{x+2}{x} \ge 0 \\ x^2(x+5)=(x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ -2 \le x < 0 \\ x^3+x^2-16x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\pm 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$.

Thí dụ 3. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+7}=1 \quad (*)$

Trích đề thi Cao đẳng sư phạm Ninh Bình khối M năm 2004

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} 3x-2\ge 0 \\ x+7\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{2}{3}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}=\sqrt{x+7}+1 \Leftrightarrow 3x-2=x+8+\sqrt{x+7} \Leftrightarrow \sqrt{x+7}=x-5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5\ge 0 \\ x+7=x^2-10x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x=9 \ \vee\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=9$.

- Kết hợp điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=9$.

Thí dụ 4. Giải phương trình: $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3} \quad (*)$

Trích đề thi Cao đẳng Hóa chất năm 2004

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x\ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+8}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x} \Leftrightarrow x+8=2x+3+2\sqrt{x\left(x+3\right)}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x\left(x+3\right)}=5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x\ge 0 \\ 4x\left(x+3\right)=\left(5-x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{25}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{25}{3} \end{array}\right.$

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=1$.

Thí dụ 5. Giải bất phương trình: $\sqrt{2\left(x^2-1\right)}\le x+1 \quad (*)$

Trích đề thi Cao đẳng Kinh tế Kỹ Thuật Thái Bình năm 2004

Bài giải tham khảo

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x^2-1\right)\ge 0 \\ x+1\ge 0 \\ 2\left(x^2-1\right)\le \left(x+1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \vee x\ge 1 \\ x\ge -1 \\ x^2-2x-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \ \vee\ x\ge 1 \\ -1\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x\in \left[1;3\right] \end{array}\right.$.

- Vậy tập nghiệm của phương trình là $x\in \left[1;3\right]$ và $x=-1$.

Thí dụ 6. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x}>x-3 \quad (*)$

Trích đề thi Cao đẳng bán công Hoa Sen khối D năm 2006 (Đại học Hoa Sen)

Bài giải tham khảo

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x\ge 0 \\ x-3<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3\ge 0 \\ x^2-4x>\left(x-3\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \vee x\ge 4 \\ x<3 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3 \\ x>\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x>\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$.

- Vậy tập nghiệm của hệ là $S = \left(-\infty; 0\right] \cup \left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Thí dụ 7. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2x \geq 3 \quad (*)$

Trích đề thi Cao đẳng Kỹ thuật Y tế I năm 2006

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ 3 - 2x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 5 \geq \left(3 - 2x\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 3x^2 - 8x + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \vee \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

- Vậy tập nghiệm của hệ là $S = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Thí dụ 8. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < x + 1 \quad (*)$

Trích đề thi Cao đẳng Kinh tế công nghệ Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2006

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < \left(x + 1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq -3 \\ x > -1 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{array}\right..$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1}{3}; 1\right] \cup \left[3; +\infty\right)$.

Thí dụ 9. Giải bất phương trình: $\sqrt{x + 11} \geq \sqrt{x - 4} + \sqrt{2x - 1} \quad (*)$

Trích đề thi Cao đẳng Điều dưỡng chính qui (Đại học điều dưỡng) năm 2004

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x + 11 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11 \\ x \geq 4 \\ x \geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$.

$$(*) \Leftrightarrow x + 11 \geq 3x - 5 + 2\sqrt{\left(x - 4\right)\left(2x - 1\right)} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - 4\right)\left(2x - 1\right)} \leq 8 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 \geq 0 \\ \left(x - 4\right)\left(2x - 1\right) \leq \left(8 - x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x^2 + 7x - 60 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq x \leq 5.$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left[4; 5\right]$.

Thí dụ 10. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\geq\sqrt{2x-3}\quad(*)$

Trích đề thi Đại học Thủy sản năm 1999

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x\geq\dfrac{3}{2}$.

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}\geq\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x+2\geq 3x-4+2\sqrt{(x-1)(2x-3)}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-5x+3}\leq 3-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{3}{2}\\3-x\geq 0\\2x^2-5x+3=(3-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{2}\leq x\leq 3\\x^2+x-6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{2}\leq x\leq 3\\-3\leq x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\dfrac{3}{2}\leq x\leq 2\right..$$

- Tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[\dfrac{3}{2};2\right]$.

Thí dụ 11. Giải bất phương trình: $\sqrt{5x+1}-\sqrt{4x-1}\leq 3\sqrt{x}\quad(*)$

Trích đề thi Đại học An Ninh Hà Nội khối D năm 1999

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases}5x+1\geq 0\\4x-1\geq 0\\x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{4}$.

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{5x+1}\leq\sqrt{4x-1}+3\sqrt{x}\Leftrightarrow 5x+1\leq 9x+4x-1+6\sqrt{4x^2-x}$

$\Leftrightarrow 6\sqrt{4x^2-x}\geq 2-8x\quad(**)$

- Do $x\geq\dfrac{1}{4}\Rightarrow 2-8x\leq 0\Rightarrow(**)$ luôn thỏa.

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Thí dụ 12. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}<\sqrt{5-2x}\quad(*)$

Trích đề thi Đại học Thủy Lợi Hà Nội hệ chưa phân ban năm 2000

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases}x+2\geq 0\\3-x\geq 0\\5-2x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq x\leq 3$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} < \sqrt{5-2x} + \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x + 2 < 8 - 3x + 2\sqrt{(5-2x)(3-x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(5-2x)(3-x)} > 2x - 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ (5-2x)(3-x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ (5-2x)(3-x) > (2x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ x \leq \dfrac{5}{2} \vee x \geq 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ 2x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{2} \vee \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 2.$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in [-2;2)$.

Thí dụ 13. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11} \geq \dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$ $(*)$

Đại học Huế khối D – R – T năm 1999 – Hệ chuyên ban

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{12+x-x^2}\left(\frac{1}{x-11} - \frac{1}{2x-9}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{12+x-x^2} = 0 \\ \begin{cases} \sqrt{12+x-x^2} > 0 \\ \dfrac{1}{x-11} - \dfrac{1}{2x-9} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \vee x = 4 \\ \begin{cases} -3 < x < 4 \\ x \geq -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ -2 \leq x \leq 4 \end{array}\right..$$

Lưu ý: Thông thường thì ta quên đi trường hợp $\sqrt{12+x-x^2} = 0$, và đây là sai lầm thường gặp của học sinh.

Thí dụ 14. Giải phương trình: $\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2\sqrt{x^2}$ $(*)$

Đại học sư phạm Hà Nội khối D năm 2000 – Cao đẳng sư phạm Hà Nội năm 2005

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x+2) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1 \\ x \leq -2 \ \vee \ x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \geq 1 \end{array}\right..$

- Với $x = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của $(*)$

- Với $x \geq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}\right) = 2\sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow x - 1 + x + 2 + 2\sqrt{(x-1)(x+2)} = 4x \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+2)} = x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x^2 + x - 2 = x^2 - x + \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{8}\ \left(N\right).$$

- Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0 \vee x = \dfrac{9}{8}$.

<u>Thí dụ 15.</u> Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} \le \sqrt{4x^2 - 18x + 18} \quad \left(*\right)$

Đại học Dược Hà Nội năm 2000

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \ge 0 \\ x^2 + 2x - 15 \ge 0 \\ 4x^2 - 18x + 18 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \vee x \le 3 \\ x \ge 3 \vee x \le -5 \\ x \ge 3 \vee x \le \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \\ x \le -5 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

- Với $x = 3$ thì $\left(*\right)$ được thỏa $\Rightarrow x = 3$ là một nghiệm của bất phương trình $\quad \left(1\right)$

$\left(*\right) \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-5\right)\left(x-3\right)} + \sqrt{\left(x+5\right)\left(x-3\right)} \le \sqrt{\left(x-3\right)\left(4x-6\right)} \qquad \left(2\right)$

- Với $x \ge 5 \Rightarrow x - 3 \ge 2 > 0$ hay $x - 3 > 0$ thì

$\left(2\right) \Leftrightarrow \sqrt{x-5} + \sqrt{x+5} \le \sqrt{4x-6} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - 25} \le 4x - 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 25} \le x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 25 \le x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x \le \dfrac{17}{3}$.

$\Rightarrow 5 \le x \le \dfrac{17}{3} \qquad \left(3\right)$

- Với $x \le -5 \Leftrightarrow -x \ge 5 \Leftrightarrow 3 - x \ge 8 > 0$ hay $3 - x > 0$ thì

$\left(2\right) \Leftrightarrow \sqrt{\left(5-x\right)\left(3-x\right)} + \sqrt{\left(-x-5\right)\left(3-x\right)} \le \sqrt{\left(3-x\right)\left(6-4x\right)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5-x} + \sqrt{-x-5} \le \sqrt{6-4x} \Leftrightarrow -2x + 2\sqrt{\left(5-x\right)\left(-x-5\right)} \le 6 - 4x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 25} \le 3 - x \Leftrightarrow x^2 - 25 \le x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x \le \dfrac{17}{3}$.

$\Rightarrow x \le -5 \qquad \left(4\right)$

- Từ $\left(1\right),\left(3\right),\left(4\right) \Rightarrow$ tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(-\infty; -5\right] \cup \left\{3\right\} \cup \left[5; \dfrac{17}{3}\right]$.

<u>Thí dụ 16.</u> Giải phương trình: $\left|x^2 - x\right| + \left|2x - 4\right| = 3 \quad \left(*\right)$

Trích đề thi Cao đẳng Hải quan – Hệ không phân ban năm 1999

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x^2 - x$		+	0	−	0	+	|	+	
$2x - 4$		−	|	−	|	−	0	+	

- Trường hợp 1. $x \in \left(-\infty;0\right] \cup \left(1;2\right]$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(x^2 - x\right) - \left(2x-4\right) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (L) \\ x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (L) \end{array}\right..$$

- Trường hợp 2. $x \in \left(0;-1\right]$.

$$(*) \Leftrightarrow -\left(x^2 - x\right) - \left(2x-4\right) = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad (L) \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (N) \end{array}\right..$$

- Trường hợp 3. $x \in \left(2;+\infty\right)$

$$(*) \Leftrightarrow \left(x^2 - x\right) + \left(2x-4\right) = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2} \quad (L) \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2} \quad (N) \end{array}\right..$$

- Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$.

Thí dụ 17. Giải phương trình: $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \dfrac{x+3}{2} \quad (*)$

Trích đề thi Cao đẳng sư phạm Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2004

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 2.\sqrt{x-1} + 1} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|\sqrt{x-1}-1\right| = \frac{x+3}{2} \qquad (1)$$

- Với $1 \le x \le 2$, ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1} = \dfrac{x+3}{2} \Leftrightarrow x = 1$.

- Với $x > 2$, ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 = \dfrac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = x + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ 16x - 16 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x^2 - 10x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

- Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1 \vee x = 5$.

Lưu ý:

Với điều kiện $x \geq 1$, có thể bình phương hai vế của $(*)$:

$$(*) \Leftrightarrow 2x + 2\left|x - 2\right| = \frac{x^2 + 6x + 9}{4}.$$

Xét hai trường hợp: $x \in \left[1;2\right]$ và $x \in \left(2;+\infty\right)$ ta vẫn có kết quả như trên.

Thí dụ 18. Giải phương trình: $\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} = 1 \quad (*)$

Trích đề thi Đại học sư phạm Vinh khối D – G – M năm 2000

Bài giải tham khảo

- Đặt $t = \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow t^2 = x - 2 \Leftrightarrow x - 1 = t^2 + 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 1 + 2t} - \sqrt{t^2 + 1 - 2t} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(t+1\right)^2} - \sqrt{\left(t-1\right)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left|t+1\right| - \left|t-1\right| = 1 \Leftrightarrow t + 1 - \left|t-1\right| = 1 \Leftrightarrow \left|t-1\right| = t$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = t \\ t - 1 = -t \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{9}{4}$.

Nhận xét: Dạng tổng quát của bài toán:

$$\boxed{\sqrt{x + 2a\sqrt{x-b} + a^2 - b} + \sqrt{x - 2a\sqrt{x-b} + a^2 - b} = cx + m},\ \left(a > 0\right).$$

Ta có thể làm theo các bước sau:

Đặt $t = \sqrt{x-b}$, $\left(t \geq 0\right)$ thì $x = t^2 + b$ nên phương trình có dạng:

$$\sqrt{t^2 + 2at + a^2} + \sqrt{t^2 - 2at + a^2} = c\left(t^2 + b\right) + m$$

Hay $\left|t+a\right| + \left|t-a\right| = c\left(t^2 + b\right) + m \Leftrightarrow t + a + \left|t - a\right| = c\left(t^2 + b\right) + m$.

Sau đó, sử dụng định nghĩa trị tuyệt đối: $\left|A\right| = \begin{cases} A \Leftrightarrow A \geq 0 \\ -A \Leftrightarrow A < 0 \end{cases}$ hoặc sử dụng phương pháp chia khoảng để giải.

Thí dụ 19. Giải phương trình: $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2 \quad (*)$

Trích đề thi Học Viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông năm 2000

Bài giải tham khảo

- Đặt $t = \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow t^2 = x - 1 \Rightarrow x = t^2 + 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 1 + 2t} - \sqrt{t^2 + 1 - 2t} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(t+1\right)^2} - \sqrt{\left(t-1\right)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow t+1-\left|t-1\right|=2 \Leftrightarrow \left|t-1\right|=t-1 \Leftrightarrow t-1\geq 0 \Leftrightarrow t\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 2.$$

- Vậy nghiệm của phương trình là $x\in\left[2;+\infty\right)$.

Thí dụ 20. Giải phương trình: $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}\quad(*)$

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{14x+14\sqrt{14x-49}}+\sqrt{14x-14\sqrt{14x-49}}=14$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{14x-49}+7\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{14x-49}-7\right)^2}=14$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{14x-49}+7+\left|\sqrt{14x-49}-7\right|=14 \quad (1)$$

- Điều kiện: $14x-49\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{7}{2}$.
- Đặt $t=\sqrt{14x-49}-7 \Rightarrow \sqrt{14x-49}=t+7$. Lúc đó:

$$(1) \Leftrightarrow t+7+7+\left|t\right|=14 \Leftrightarrow \left|t\right|=-t \Leftrightarrow t\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{14x-49}-7\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}14x-49\geq 0\\ \sqrt{14x-49}\leq 7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq \frac{7}{2}\\ 14x-49\leq 49\end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{2}\leq x\leq 7.$$

- Vậy nghiệm của phương trình là $x\in\left[\frac{7}{2};7\right]$.

Thí dụ 21. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\geq \frac{3}{2}\quad(*)$

Học Viện Ngân Hàng năm 1999

Bài giải giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}\geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|\geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

- Điều kiện: $x\geq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-1\right|\geq \frac{1}{2}-\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}-1\geq \frac{1}{2}-\sqrt{x-1}\\ -\sqrt{x-1}+1\geq \frac{1}{2}-\sqrt{x-1}\quad (\forall x\geq 1)\end{array}\right..$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[1;+\infty\right)$.

Thí dụ 22. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0 \quad (1)$

Trích đề thi Cao đẳng Giao Thông năm 2003

Bài giải giải tham khảo

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}=-\sqrt[3]{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}\right)^3=-(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow 4x+3+3\sqrt[3]{2x+1}.\sqrt[3]{2x+2}\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}\right)=-(2x+3) \quad (2)$$

Thay $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}=-\sqrt[3]{2x+3}$ vào (2) ta được:

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}.\sqrt[3]{2x+2}.\sqrt[3]{2x+3}=-2x-2$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(2x+2)(2x+3)=-(2x+2)^3$$

$$\Leftrightarrow (2x+2)\left[(2x+2)(2x+3)+(2x+2)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+2=0\\ 8x^2+18x+10=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-\dfrac{5}{4}\end{array}\right..$$

- Thay $x=-1 \vee x=-\dfrac{5}{4}$ vào phương trình (1), chỉ có nghiệm $x=-1$ thỏa. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Thí dụ 23. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=\sqrt[3]{5x+1} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

$$(*)\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{2x-1}\right)^3=5x+1$$

$$\Leftrightarrow 5x+\left(\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{2x-1}\right).\sqrt[3]{3x-1}.\sqrt[3]{2x-1}=5x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5x+1}.\sqrt[3]{3x-1}.\sqrt[3]{2x-1}=1$$

$$\Leftrightarrow (5x+1)(3x-1)(2x-1)=1$$

$$\Leftrightarrow 30x^3-19x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{19}{30}\end{array}\right..$$

- Thay $x=0$ vào $(*)$, ta được $(*)\Leftrightarrow -2=1$ (vô lí) $\Rightarrow$ loại nghiệm $x=0$.
- Thay $x=\dfrac{19}{30}$ vào $(*)$, ta được $(*)\Leftrightarrow \dfrac{5}{\sqrt[3]{30}}=\dfrac{5}{\sqrt[3]{30}}$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ nhận $x=\dfrac{19}{30}$.

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{19}{30}$.

Thí dụ 24. Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 3x+1 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ 2x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = \sqrt{4x} + \sqrt{2x+2} \quad (1)$

Nhận thấy (1) có $(3x+1) + (2x+2) = (4x) + (x+3) = 5x+3$, nên

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{4x} - \sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow 3x+1+2x+2-2\sqrt{(3x+1)(2x+2)} = 4x+x+3-2\sqrt{4x(x+3)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(2x+2)} = \sqrt{4x(x+3)}$

$\Leftrightarrow 6x^2+8x+2 = 4x^2+12x$

$\Leftrightarrow x = 1$.

So với điều kiện và thay thế $x = 1$ vào phương trình $(*)$ thì $(*)$ thỏa. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

1/ $\sqrt{x^2+3x+4} - 3x = 1$. **ĐS**: $x = \dfrac{-3+\sqrt{105}}{16}$.

2/ $\sqrt{x^2+2x-6} = 2-x$. **ĐS**: $x = \dfrac{5}{3}$.

3/ $x + \sqrt{x^2+x+2} = 3$. **ĐS**: $x = 1$.

4/ $x+2+\sqrt{x^2+3x+1} = 0$. **ĐS**: $x = -3$.

5/ $\sqrt{x^3-2x+5} = 2x-1$. **ĐS**: $x = 2 \vee x = 1+\sqrt{3}$.

6/ $3x + \sqrt{x^3-x+1} = -2$. **ĐS**: $x = -1$.

7/ $\sqrt{x^3+x^2+6x+28} = x+5$. **ĐS**: $x = 1 \vee x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

8/ $\sqrt{x^4-4x^3+14x-11} = 1-x$. **ĐS**: $x = -2 \vee x = 1$.

9/ $\sqrt{x^4+5x^3+12x^2+17x+7}=\sqrt{6}\left(x+1\right)$. **ĐS**: $x=\sqrt{3}-2$.

10/ $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}=8$. **ĐS**: $x=8$.

11/ $\sqrt{7x+4}-\sqrt{x+1}=3$. **ĐS**: $x=3$.

12/ $\sqrt{5x+1}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{14x+7}$. **ĐS**: $x=-\dfrac{1}{9}\ \vee\ x=3$.

13/ $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$. **ĐS**: $x=2\ \vee\ x=4$.

14/ $\sqrt{11x+3}-\sqrt{x+1}=4\sqrt{2x-5}$. **ĐS**: $x=3$.

15/ $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$. **ĐS**: $x=2$.

16/ $2\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2\sqrt{2x-1}$. **ĐS**: $x=5$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau

1/ $\left|x^2-1\right|=\left|x^3-5x^2-2x+4\right|$. **ĐS**: $x=-1\vee x=\dfrac{7\pm\sqrt{29}}{2}\vee x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

2/ $\left|x^3-3x+1\right|=2x-1$. **ĐS**: $x=2\ \vee\ x=5$.

3/ $\left|x^2-1\right|+\left|x\right|=1$. **ĐS**: $x=0\ \vee\ x=\pm1$.

4/ $\left|x+1\right|+\left|x-1\right|=1+\left|1-x^2\right|$. **ĐS**: $x=0\ \vee\ x=\pm2$.

5/ $\left|3-2x\right|-\left|x\right|=5\left(\left|2+3x\right|+x-2\right)$. **ĐS**: $x=-\dfrac{23}{9}\ \vee\ x=\dfrac{3}{23}$.

Bài tập 3. Giải các bất phương trình sau:

1/ $\sqrt{2x+3}\le\sqrt{4x^2-3x-3}$. **ĐS**: $x\in\left[-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{4}\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

2/ $\sqrt{x^2-x-12}<x$. **ĐS**: $x\in\left[4;+\infty\right)$.

3/ $\sqrt{-x^2+4x-3}>2x-5$. **ĐS**: $x\in\left[1;\dfrac{14}{5}\right)$.

4/ $\sqrt{5x^2-2x-2}\ge4-x$. **ĐS**: $x\in\left(-\infty;-3\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

5/ $\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}>5$. **ĐS**: $x>0$.

6/ $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}<\sqrt{5-2x}$. **ĐS**: $x\in\left[-2;2\right)$.

7/ $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-8}\le\sqrt{2x+7}$. **ĐS**: $x\in\left[9;+\infty\right)$.

8/ $\sqrt{5x+1}-\sqrt{4x-1}\le3\sqrt{x}$. **ĐS**: $x\in\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

9/ $\sqrt{5x+1}-\sqrt{4-x}\le\sqrt{x+6}$. **ĐS**: $x\in\left[-\dfrac{1}{5};3\right]$.

<u>Bài tập 4.</u> Giải các bất phương trình sau

1/ $\left|3x+5\right|<\left|x^2+7x\right|$. <u>ĐS</u>: $x\in\left(-\infty;-5-2\sqrt5\right)\cup\left(-5;-5+2\sqrt5\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

2/ $\left|x^2+8x-1\right|<2x+6$. <u>ĐS</u>: $x\in\left(-5+2\sqrt5;\ 1\right)$.

3/ $\left|2x^2-3x-10\right|\geq 8-x$. <u>ĐS</u>: $x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{37}}{2}\right]\cup\left[1-\sqrt2;1+\sqrt2\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{37}}{2};+\infty\right)$.

4/ $\left|x^2-5x+4\right|\leq x^2+6x+5$. <u>ĐS</u>: $x\in\left(-\frac{1}{11};+\infty\right)$.

5/ $4x^2+4x-\left|2x+1\right|\geq 5$. <u>ĐS</u>: $x\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[1;+\infty\right)$.

6/ $\dfrac{\left|2x-1\right|}{x^2-3x-4}<\dfrac{1}{2}$. <u>ĐS</u>: $x\in\left(-\infty;-3\right)\cup\left(-1;4\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{57}}{2};+\infty\right)$.

7/ $\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right|\geq x+5$. <u>ĐS</u>: $x\in\left(-\infty;-1-\sqrt7\right]\cup\left[-3+\sqrt{15};1\right)\cup\left(1;-1+\sqrt7\right)$.

8/ $\dfrac{3}{\left|x+3\right|-1}\geq\left|x+2\right|$. <u>ĐS</u>: $x\in\left[-5;-4\right)\cup\left(-2;2-\sqrt3\right]$.

9/ $\dfrac{9}{\left|x-5\right|-3}\geq\left|x-2\right|$. <u>ĐS</u>: $x\in\left(-\infty;-1\right]\cup\left(2;5\right)\cup\left(8;5+3\sqrt2\right)$.

<u>Bài tập 5.</u> Giải phương trình: $2x-\sqrt{2x-1}=7$.

Cao đẳng Lương Thực – Thực Phẩm năm 2004 (Đại học Lương Thực Thực Phẩm)

<u>ĐS</u>: $x=5$.

<u>Bài tập 6.</u> Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x^2-6}=12$.

Đại học Văn Hóa năm 1998

<u>ĐS</u>: $x=\pm\sqrt{10}$.

<u>Bài tập 7.</u> Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x-8}=\sqrt3\left(x-4\right)$.

Đại học Dân Lập Đông Đô khối B năm 2001

<u>ĐS</u>: $x=4\ \vee\ x=7$.

<u>Bài tập 8.</u> Giải phương trình: $\sqrt{x^2-6x+6}=2x-1$.

Đại học Xây Dựng năm 2001

<u>ĐS</u>: $x=1$.

<u>Bài tập 9.</u> Giải phương trình: $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$.

Đại học Dân lập Hồng Bàng năm 1999

<u>ĐS</u>: $x=3$.

Bài tập 10. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} + x - 2 = 0$.

Đại học Dân Lập Bình Dương khối D năm 2001

ĐS: $x = -\frac{1}{2}$.

Bài tập 11. Giải phương trình: $1 + \sqrt{x - 1} = \sqrt{6 - x}$.

Cao đẳng sư phạm Nhà Trẻ – Mẫu Giáo TWI năm 2000

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 12. Giải phương trình: $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x - 2} - \sqrt{x - 1} = 0$.

Đại học Kinh tế quốc dân khối A năm 2000

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 13. Giải phương trình: $\sqrt{16 - x} + \sqrt{9 - x} = 7$.

Đại học Đà Lạt khối A, B năm 1998

ĐS: $x = 0 \vee x = 7$.

Bài tập 14. Giải phương trình: $\sqrt{x + 8} - \sqrt{x} = \sqrt{x + 3}$.

Cao đẳng kinh tế kỹ thuật Nghệ An khối A năm 2006

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 15. Giải phương trình: $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x + 3}$.

Học Viện Ngân Hàng khối A năm 1998

ĐS: $x = -\frac{1}{2}$.

Bài tập 16. Giải phương trình: $\sqrt{2x + 9} = \sqrt{4 - x} + \sqrt{3x + 1}$.

Cao đẳng sư phạm Mẫu Giáo – Trung Ương III năm 2006

ĐS: $x = 0 \vee x = \frac{11}{3}$.

Bài tập 17. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$.

Đại học Bách Khoa Hà Nội khối A – D năm 2001

ĐS: $x = -1 \vee x = 1$.

Bài tập 18. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + x - 6} \geq x + 2$.

Cao đẳng khối T – M năm 2004 (Đại học Hùng Vương)

ĐS: $x \in \left(-\infty; -3\right]$.

Bài tập 19. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x + 3} \geq x - 2$.

Đại học Dân lập kĩ thuật công nghệ khối A – B năm 1999

ĐS: $x \in \left[-\frac{3}{2};\ 3 + 2\sqrt{2}\right]$.

Bài tập 20. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x-1} \le 8 - x$.

Đại học Dân lập kĩ thuật công nghệ khối D năm 1999

ĐS: $x \in \left[\frac{1}{2};\ 5\right]$.

Bài tập 21. Giải bất phương trình: $\sqrt{8x^2 - 6x + 1} - 4x + 1 \le 0$.

Dự bị Đại học khối D năm 2005

ĐS: $x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Bài tập 22. Giải bất phương trình: $\sqrt{(x+1)(4-x)} > x - 2$.

Đại học Mỏ – Địa chất Hà Nội năm 2000

ĐS: $x \in \left[-1; \frac{7}{2}\right)$.

Bài tập 23. Giải bất phương trình: $x + \sqrt{x^2 + 4x} > 1$.

Học Viện Chính Trị Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 2000

ĐS: $x \in \left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

Bài tập 24. Giải bất phương trình: $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1)$.

Đại học Kinh tế Quốc Dân năm 2001 – Cao đẳng sư phạm Cần Thơ khối A năm 2005

ĐS: $x \in (-\infty; -5] \cup \left[-\frac{4}{3}; 4\right)$.

Bài tập 25. Giải bất phương trình: $\frac{x-1}{x} - 2\sqrt{\frac{x-2}{x}} \ge 3$.

Đại học Mở Hà Nội khối A – B – R – V – D4 năm 1999

ĐS: $x \in \left(-\frac{1}{12};\ 0\right)$.

Bài tập 26. Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x+5} \ge \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x+4}$.

Đại học Huế khối D – R – T năm 1999 – Hệ không chuyên ban

ĐS: $x \in [-2; -1] \ \vee\ x = 3$.

Bài tập 27. Giải bất phương trình: $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \ge 0$.

Đại học D – 2002

ĐS: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \vee x = 2 \vee x \geq 3$.

Bài tập 28. Giải bất phương trình: $\left(x^2 + x - 2\right)\sqrt{2x^2 - 1} < 0$.

Cao đẳng sư phạm Nhà Trẻ – Mẫu Giáo TWI năm 2000

ĐS: $x \in \left(-2; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

Bài tập 29. Giải bất phương trình: $\left(x - \frac{2x+4}{2x-5}\right)\sqrt{10x - 3x^2 - 3} \geq 0$.

Đề thi thử Đại học lần 7 – THPT Chuyên Đại học Sư Phạm Hà Nội năm 2012

ĐS: $x = 3 \vee x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{5}{2}\right)$.

Bài tập 30. Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{51 - 2x - x^2}}{1 - x} < 1$.

Đại học Tài Chính Kế Toán Hà Nội năm 1997

ĐS: $x \in \left[-1 - \sqrt{52};\ -5\right) \cup \left(1;\ -1 + \sqrt{52}\right)$.

Bài tập 31. Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{-3x^2 + x + 4}}{x} < 2$.

Đại học Xây Dựng năm 1997 – 1998

ĐS: $x \in \left[-1; 0\right) \cup \left(\frac{9}{7}; \frac{4}{3}\right]$.

Bài tập 32. Giải bất phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3x - 5}} > \frac{1}{2x - 1}$.

Đại học Sư Phạm Vinh khối B, E năm 1999

ĐS: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(2; +\infty\right)$.

Bài tập 33. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+1} > 3 - \sqrt{x+4}$.

Đại học Bách khoa Hà Nội năm 1999

ĐS: $x \in \left(0; +\infty\right)$.

Bài tập 34. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x}$.

Đại học Ngoại Thương khối D năm 2000

ĐS: $x \in \left[4;\ 5\right] \cup \left[6;\ 7\right]$.

Bài tập 35. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} \leq \sqrt{5x+1}$.

Cao đẳng khối A – B năm 2009

ĐS: $x \in [2;3]$.

Bài tập 36. Giải bất phương trình: $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-9}\le\sqrt{5x-27}$.

Đại học Dân Lập Phương Đông khối A, D năm 2001

ĐS: $x \in \left(\dfrac{229+\sqrt{26304}}{59};+\infty\right)$.

Bài tập 37. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}>\sqrt{x+3}$.

Đại học Ngoại Ngữ Hà Nội năm 1997

ĐS: $x \in \left[-3;\dfrac{-12+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

Bài tập 38. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-3}\le\sqrt{4x+9}$.

Đại học Dân Lập Bình Dương khối A năm 2001

ĐS: $x \in [3;4]$.

Bài tập 39. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+4}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}$.

Đại học Thăng Long khối D năm 2001

ĐS: $x \in (8;+\infty)$.

Bài tập 40. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}<1$.

Đại học Hồng Đức khối D năm 2001

ĐS: $x \in (-\infty;-5)\setminus\{4\}$.

Bài tập 41. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\le 4$.

Đại học Dân Lập Bình Dương khối D năm 2001

ĐS: $x \in \left[1;\dfrac{5}{4}\right]$.

Bài tập 42. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x}\ge\sqrt{3x-2}$.

Dự bị Đại học khối B năm 2005

ĐS: $x \in \left[\dfrac{2}{3};1\right]\cup\left[\dfrac{14}{3};5\right]$.

Bài tập 43. Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$.

Đại học A – 2005

ĐS: $x \in [2;10)$.

Bài tập 44. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\ge\sqrt{x-3}$.

Đề thi thử Đại học năm 2010 – THPT Long Châu Sa – Phú Thọ

ĐS: $x\in\left[3;\ \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

Bài tập 45. Giải bất phương trình: $\dfrac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}}>1,\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Đề thi Thử Đại học lần 1 năm 2013 khối A, B – THPT Quốc Oai – Hà Nội

ĐS: $x\in\left(\dfrac{\sqrt{13}-1}{6};+\infty\right)$.

Bài tập 46. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2-6x+1}-x+2>0$.

Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1994

ĐS: $x\in\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right]\cup\left(3;+\infty\right)$.

Bài tập 47. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+1}=x^2-2x+1$.

Cao đẳng sư phạm Cà Mau khối B năm 2005

ĐS: $x=0\ \vee\ x=1\ \vee\ x=2$.

Bài tập 48. Giải phương trình: $\sqrt{x-1}=\left|x-1\right|$.

Cao đẳng sư phạm Cà Mau khối T – M năm 2005

ĐS: $x=1\ \vee\ x=2$.

Bài tập 49. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}>1$.

Cao đẳng Tài chính quản trị kinh doanh khối A năm 2006

ĐS: $x\in\left(1;2\right]$.

Bài tập 50. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-1}$.

Đại học Dân Lập Hồng Bàng năm 1999

ĐS: $x\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Bài tập 51. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}\le\sqrt{x^2+4x-5}$.

Đại học An Ninh khối D – G năm 1998

ĐS: $x=1$.

Bài tập 52. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}\le\sqrt{2x^2+9x+7}$.

Đại học Bách Khoa Hà Nội khối D năm 2000

ĐS: $x=1\ \vee\ x=-5$.

Bài tập 53. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1}\ge x-1$.

Đại học Kiến Trúc Hà Nội năm 2001

ĐS: $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\ \vee\ x=1$.

Bài tập 54. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$.

Đại học Y Dược năm 2001 – Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

ĐS: $x\in\left[4;+\infty\right)\ \vee\ x=1$.

Bài tập 55. Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$.

Đại học Thủy Sản năm 1997

ĐS: $x=2\ \vee\ x=5$.

Bài tập 56. Giải phương trình: $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$.

Đại học khối D năm 2005

ĐS: $x=3$.

Bài tập 57. Giải phương trình: $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$.

ĐS: $x=0\ \vee\ x=3$.

Bài tập 58. Giải phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+3\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1-x$.

ĐS: $x=5$.

Bài tập 59. Giải phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

Đại học Cảnh Sát Nhân Dân II năm 2001

ĐS: $x\in\left[2;+\infty\right)$.

Bài tập 60. Giải phương trình: $\sqrt{2x-4+2\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}}=14$.

ĐS: $x=15$.

Bài tập 61. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\frac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}}=x+1$.

Đại học Phòng Cháy Chữa Cháy năm 2001

ĐS: $x=\frac{3}{5}$.

Bài tập 62. Giải phương trình: $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=\frac{x+5}{2}$.

Đại học Thủy Sản năm 2001

ĐS: $x=-1\ \vee\ x=3$.

Bài tập 63. Giải: $\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}-2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}+3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}}=4$.

ĐS: $x = 1 \vee x = \frac{5}{2}$.

Bài tập 64. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}$.

ĐS: $x = 0 \vee x = \pm 1$.

Bài tập 65. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{2}$.

ĐS: $x = 1 \vee x = 3$.

Bài tập 66. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x^3 - 1} + \sqrt[3]{1 - x^3} = x$.

ĐS: $x = 0 \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Bài tập 67. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$.

ĐS: $x = 1 \vee x = \frac{3}{2} \vee x = 2$.

Bài tập 68. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$.

Cao đẳng Hải Quan năm 1996

ĐS: $x = \frac{2}{3} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 1$.

Bài tập 69. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$.

Đại học An Ninh khối A năm 2001 – Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự năm 1999

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 70. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$.

ĐS: $x = -5 \vee x = -6 \vee x = -\frac{11}{2}$.

Bài tập 71. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x-5} + \sqrt[3]{3x+7} - \sqrt[3]{5x+2} = 0$.

ĐS: $x = -\frac{5}{2} \vee x = \frac{5}{2} \vee x = -\frac{7}{3}$.

Bài tập 72. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$.

ĐS: $x = -1$.

Bài tập 73. Giải phương trình: $\sqrt{3x+8} - \sqrt{3x+5} = \sqrt{5x-4} - \sqrt{5x-7}$.

Đại học Dân Lập Văn Lang khối A, B năm 1997

ĐS: $x = 6$.

Bài tập 74. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 2x - 2}$.

ĐS: Vô nghiệm.

Bài tập 75. Giải phương trình: $\sqrt{2\left(x-4\right)} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{x-6} - \sqrt{x+5}$.

ĐS: Vô nghiệm.

Bài tập 76. Giải phương trình: $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$.

Dự bị Đại học khối B năm 2008

ĐS: $x=3$.

Bài tập 77. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+7}=\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x+8}$.

ĐS: $x=-1$.

Bài tập 78. Giải phương trình: $\sqrt{x+7}+\sqrt{4x+1}=\sqrt{5x-6}+2\sqrt{2x-3}$.

ĐS: $x=\frac{13}{4}$.

Bài tập 79. Giải phương trình: $\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$.

ĐS: $x=1$.

Bài tập 80. Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}$.

Đại học Ngoại Thương khối D năm 1997

ĐS: $x=0$.

Bài tập 81. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$.

ĐS: $x=1\pm\sqrt{3}$.

Bài tập 82. Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{2\left(x^2-16\right)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$.

Đại học A – 2004

ĐS: $x\in\left(10-\sqrt{34};\ +\infty\right)$.

Bài tập 83. Giải phương trình: $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$.

Học sinh giỏi Quốc Gia năm 2000

ĐS: $x=3$.

Bài tập 84. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}\geq\frac{2}{x}$.

Đại học An Giang khối A năm 2000

ĐS: $x\in\left[\sqrt[3]{\frac{5}{4}};+\infty\right)$.

B – GIẢI PHƯƠNG TRÌNH & BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH ĐƯA VỀ TÍCH SỐ HOẶC TỔNG HAI SỐ KHÔNG ÂM



I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Sử dụng biến đổi cơ bản

Dùng các phép biến đổi, đồng nhất kết hợp với việc tách, nhóm, ghép thích hợp để đưa phương trình về dạng tích đơn giản hơn và biết cách giải.

Một số biến đổi thường gặp

- $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x) = 0$.
- Chia Hoocner để đưa về dạng tích số ("Đầu rơi, nhân tới, cộng chéo").
- Các hằng đẳng thức thường gặp.
- $u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u - 1)(v - 1) = 0$.
- $au + bv = ab + vu \Leftrightarrow (u - b)(v - a) = 0$.

……..

2/ Tổng các số không âm

Dùng các biến đổi (chủ yếu là hằng đẳng thức) hoặc tách ghép để đưa về dạng:

$$A^2 + B^2 + C^2 + ... = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ ... = 0 \end{cases}.$$

3/ Sử dụng nhân liên hợp

— Dự đoán nghiệm $x = x_o$ bằng máy tính bỏ túi $(\text{SHIFT} - \text{SOLVE} \text{ hay } \text{ALPHA} - \text{CALC})$.

— Tách, ghép phù hợp để sau khi nhân liên hợp xuất hiện nhân tử chung $(x - x_o)$ hoặc bội của $(x - x_o)$ trong phương trình nhằm đưa về phương trình tích số: $(x - x_o).g(x) = 0$.

— Các công thức thường dùng trong nhân liên hợp

Biểu thức	***Biểu thức liên hiệp***	***Tích***
$\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$	$\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$	$A - B$
$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A + B$
$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A - B$

4/ Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Đặt ẩn số phụ không hoàn toàn là một hình thức phân tích thành nhân tử. Khi đặt ẩn phụ t thì biến x vẫn tồn tại và ta xem x là tham số. Thông thường thì đó là phương trình bậc hai theo t (tham số x) và giải bằng cách lập Δ.

II – CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

1/ Sử dụng biến đổi đẳng thức cơ bản để đưa về phương trình tích số

Thí dụ 25. Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x+5} = 5 \quad (*)$

Cao đẳng sư phạm Cần Thơ khối M năm 2005

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x + 5 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -5$.

$(*) \Leftrightarrow x^2 - (x+5) + \left(x + \sqrt{x+5}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{x+5}\right)^2 + \left(x + \sqrt{x+5}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x+5}\right)\left(x + \sqrt{x+5}\right) + \left(x + \sqrt{x+5}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x+5}\right)\left(x + 1 - \sqrt{x+5}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+5} = -x & (1) \\ \sqrt{x+5} = x+1 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x \ge 0 \\ x + 5 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \vee x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$.

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ x + 5 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \vee x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \ \vee \ x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

✍ **Nhận xét**: Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đặt ẩn phụ $y = \sqrt{x+5}$ để đưa về hệ phương trình gần đối xứng loại II: $\begin{cases} y^2 - x = 5 \\ x^2 + y = 5 \end{cases}$ và lấy vế trừ vế. Ta sẽ giải ra tìm x.

Dạng tổng quát của bài toán là: $\boxed{x^2 + \sqrt{x+a} = a}$, $a \in \mathbb{R}$.

Thí dụ 26. Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12 \quad (*)$

Đại học Dược Hà Nội năm 1999

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $10 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10}$.

$(*) \Leftrightarrow (x+3)\sqrt{10 - x^2} = (x+3)(x-4)$

$\Leftrightarrow (x+3)\left[\sqrt{10 - x^2} - (x-4)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ \sqrt{10-x^2}=x-4 \quad (1) \end{array}\right.$$

- Ta có: $-\sqrt{10}\le x\le\sqrt{10}\Rightarrow x-4\le\sqrt{10}-4<0\Rightarrow x-4<0$ nên (1) vô nghiệm.
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-3$.

Thí dụ 27. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

$$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)+\left[\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)+\sqrt[3]{x+2}\left(1-\sqrt[3]{x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(1-\sqrt[3]{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+1}=1\\ \sqrt[3]{x+2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right..$$

✍ **Nhận xét**: Trong hai thí dụ trên tôi đã sử dụng phân tích thành tích của tam thức bậc hai: $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ với $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của $f(x)=0$.

Thí dụ 28. Giải phương trình: $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1 \quad (*)$

Dự bị 2 Đại học khối D năm 2006

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases}7-x\ge 0\\ x-1\ge 0\\ -x^2+8x-7\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 7$.

$$(*)\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{7-x}-\sqrt{(7-x)(x-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\sqrt{x-7}\left(\sqrt{x-1}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-7}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=2\\ \sqrt{x-1}=\sqrt{x-7}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=4\end{array}\right..$$

Thí dụ 29. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+10x+21}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+7}-6 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 10x + 21 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x + 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -3$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+7)} - 3\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+7} + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+7} - 3\right) - 2\left(\sqrt{x+7} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+7} - 3\right)\left(\sqrt{x+3} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+7} = 3 \\ \sqrt{x+3} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1 \vee x = 2$.

Thí dụ 30. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 3x} + 2\sqrt{x+2} = 2x + \sqrt{x + \dfrac{6}{x} + 5} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x + \dfrac{6}{x} + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x(x+3)} + 2\sqrt{x+2} - 2x - \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 6}{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{\frac{x+3}{x}} - \sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x}} + 2\sqrt{x+2} - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x}}\left(x - \sqrt{x+2}\right) - 2\left(x - \sqrt{x-2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{\frac{x+3}{x}} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = x \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}} = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1 \vee x = 2$.

Thí dụ 31. Giải phương trình: $\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad (*)$

Trích đề thi Đại học khối D năm 2006

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Cách giải 1. Biến đổi đưa về phương trình tích số

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} - x + x^2 - (2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1} - x\right) + x^2 - \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1} - x\right) + \left(x - \sqrt{2x-1}\right)\left(x + \sqrt{2x-1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2x-1}\right)\left(-1 + x + \sqrt{2x-1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-1} = x \\ \sqrt{2x-1} = 1 - x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 1 = x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2x - 1 = (1-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 - \sqrt{2}.$$

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1 \vee x = 2 - \sqrt{2}$.

Cách giải 2. Biến đổi và nhân lượng liên hợp để đưa về phương trình tích số

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1} - 1\right) + \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}{\sqrt{2x-1} + 1} + (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1} + 1} + (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{2x-1} + 1} + x - 2\right) = 0.$$

Đến đây, giải tiếp tục được kết quả $x = 1 \vee x = 2 - \sqrt{2}$.

Cách giải 3. Xem đây là dạng $\sqrt{A} = B$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = -x^2 + 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = \left(-x^2 + 3x - 1\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 8x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \left(x-1\right)^2\left(x^2 - 4x + 2\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = 1 \vee x = 2 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 2 - \sqrt{2}.$$

Cách giải 4. Đặt ẩn số phụ

Đặt $t = \sqrt{2x-1} \ge 0 \Rightarrow x = \dfrac{t^2+1}{2}$. Lúc đó: $\left(*\right) \Leftrightarrow t^4 - 4t^2 + 4t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(t-1\right)^2\left(t^2 + 2t - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2x-1} = 1 \\ t = \sqrt{2x-1} = \sqrt{2} - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{array}\right..$$

Thí dụ 32. Giải phương trình: $x - 2\sqrt{x-1} - \left(x-1\right)\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - x} = 0 \quad \left(*\right)$

Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự năm 2000

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ x^2 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 0 \\ x \le 0 \vee x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1.$

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 2\sqrt{x-1} + 1\right] - \sqrt{x\left(x-1\right)}\sqrt{x-1} + \sqrt{x\left(x-x\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 - \sqrt{x\left(x-1\right)}\left(\sqrt{x-1} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} - 1\right)\left[\sqrt{x-1} - 1 - \sqrt{x\left(x-1\right)}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x-1} = 1 & \left(1\right) \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{x\left(x-1\right)} + 1 & \left(2\right) \end{array}\right.$$

$\left(1\right) \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

$\left(2\right) \Leftrightarrow x - 1 = x\left(x-1\right) + 1 + 2\sqrt{x\left(x-1\right)} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 + 2\sqrt{x\left(x-1\right)} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + 2\sqrt{x\left(x-1\right)} + 1 = 0:$ vô nghiệm.

- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Thí dụ 33. $\sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right) = 1 \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3 + \sqrt[3]{(x+1)(x+2)}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 2\sqrt[3]{(x+1)(x+2)} + \left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right)\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x+2} \\ \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Thí dụ 34. Giải phương trình: $2x^2 - 6x + 10 - 5(x-2)\sqrt{x+1} = 0 \quad (*)$

Trích Đề thi thử Đại học lần 1 năm 2013 khối A, B, D – THPT Lê Hữu Trác 1

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge -1$.

$$(*) \Leftrightarrow 2(x-2)^2 + 2(x+1) - 5(x-2)\sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2(x-2)^2 - (x-2)\sqrt{x+1}\right] + \left[2\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 4(x-2)\sqrt{x+1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[2(x-2) - \sqrt{x+1}\right] - 2\sqrt{x+1}\left[2(x-2) - \sqrt{x+1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2(x-2) - \sqrt{x+1}\right]\left[(x-2) - 2\sqrt{x+1}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2(x-2) - \sqrt{x+1} = 0 & (1) \\ 2\sqrt{x+1} - (x-2) = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 4x^2 - 17x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 8x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$$

- So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm: $x = 3 \vee x = 8$.

Thí dụ 35. Giải phương trình: $4x^2 + \sqrt{2x+3} = 8x + 1 \qquad (*)$

Trích Đề thi thử Đại học khối A, B, D năm 2013 – THPT Sầm Sơn – Thanh Hóa

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $2x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{3}{2}$.

$$(*) \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 - 2\sqrt{2x+3} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+3} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{3}{2} = \sqrt{2x+3} - \dfrac{1}{2} \\ 2x - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} - \sqrt{2x+3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+3} = 2x - 1 \\ \sqrt{2x+3} = 1 - 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5-\sqrt{21}}{4} \\ x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{5-\sqrt{21}}{4} \vee x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$.

<u>Thí dụ 36.</u> Giải phương trình: $729x^4 + 8\sqrt{1-x^2} = 36 \quad (*)$

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 228

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.
- Đặt $y = \sqrt{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x^4 = \left(1-y^2\right)^2$.

$(*) \Leftrightarrow 729\left(1-y^2\right)^2 + 8y - 36 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[27^2\left(1-y^2\right)^2 - 36\left(1-y^2\right) + \frac{4}{9}\right] - \left(36y^2 - 8y + \frac{4}{9}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[27\left(1-y^2\right) - \frac{2}{3}\right]^2 - \left(6y - \frac{2}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[27\left(1-y^2-6y\right)\right]\left[27\left(1-y^2\right) + 6y - \frac{4}{3}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 27\left(1-y^2-6y\right) = 0 \ \vee \ 27\left(1-y^2\right) + 6y - \frac{4}{3} = 0.$$

- Với $1 - y^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{-1-\sqrt{82}}{9} < 0 \ (L) \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{82}}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \dfrac{-1+\sqrt{82}}{9}$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{9}\sqrt{-2+2\sqrt{82}}.$$

- Với $27\left(1-y^2\right) + 6y - \dfrac{4}{3} = 0$. Giải ra ta phương trình vô nghiệm.
- Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = \pm\dfrac{1}{9}\sqrt{-2+2\sqrt{82}}$.

<u>Thí dụ 37.</u> Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+2} = \dfrac{x^2+5x+2}{2x+2} \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + x + 2 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -1$.

$(*) \Leftrightarrow x^2 + 5x + 2 - \left(2x+2\right)\sqrt{x^2+x+2}$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x+2\right)-\left(2x+2\right)\sqrt{x^2+x+2}+4x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2-2x\sqrt{x^2+x+2}-2\sqrt{x^2+x+2}+4x=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2}\left(\sqrt{x^2+x+2}-2x\right)-2\left(\sqrt{x^2+x+2}-2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+2}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+2}=2x\\ \sqrt{x^2+x+2}=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right..$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 85. Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+7}=7$.

Cao đẳng Sư Phạm Kỹ Thuật Vinh năm 2001

ĐS: $x=2 \vee x=\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$.

Bài tập 86. Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+1}=1$.

ĐS: $x=-1 \vee x=0 \vee x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 87. Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$.

ĐS: $x=1$.

Bài tập 88. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$.

ĐS: $x=2$.

Bài tập 89. Giải phương trình: $\sqrt{x\left(x-1\right)}+\sqrt{x\left(x+2\right)}=2\sqrt{x^2}$.

Đại học sư phạm Hà Nội khối D năm 2000 – Cao đẳng sư phạm Hà Nội năm 2005

ĐS: $x=0 \vee x=\dfrac{9}{8}$.

Bài tập 90. Giải phương trình: $4x^2+14x+11=4\sqrt{6x+10}$.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 420 tháng 6 năm 2012

ĐS: $x=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{4}$.

Bài tập 91. Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$.

ĐS: $x=0 \vee x=1$.

Bài tập 92. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}=\sqrt{x^2-9x+18}$.

ĐS: $x=3$.

Bài tập 93. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$.

ĐS: $x=-1$.

Bài tập 94. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-x-2}-2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{x+1}$.

ĐS: $x=3$.

Bài tập 95. Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x}=1$.

Đại học Dân Lập Hải Phòng khối A năm 2000

ĐS: $x=0 \vee x=1$.

Bài tập 96. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+2(x+1)=x-1+\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}$.

Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán Đại học Sư Phạm Hà Nội I năm 1997 – 1998

ĐS: $x=0$.

Bài tập 97. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2+x}$.

HD: $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}+\sqrt[3]{x}=1+\sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=0$.

Bài tập 98. Giải phương trình: $3x^2+3x+2=(x+6)\sqrt{3x^2-2x-3}$.

Bài tập 99. Giải phương trình: $x^2+x+2=(3x-2)\sqrt{x+1}$.

Bài tập 100. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+2}=\dfrac{3x^2+3x+2}{3x+1}$.

Bài tập 101. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}=\dfrac{x+2+2\sqrt{2x+1}}{x+\sqrt{2x+1}}$.

Bài tập 102. Giải phương trình: $x\sqrt{2x+3}+3\left(\sqrt{x+5}+1\right)=3x+\sqrt{2x^2+13x+15}+\sqrt{2x+3}$.

Bài tập 103. Giải phương trình: $14\sqrt{x+35}+6\sqrt{x+1}=84+\sqrt{x^2+36x+35}$.

Bài tập 104. Giải phương trình: $4\sqrt{x^2+x+1}=1+5x+4x^2-2x^3-x^4$.

Đề thi học sinh giỏi vòng 1 tỉnh Long An – Ngày 6/10/2011

ĐS: $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2} \vee x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2}$.

Bài tập 105. Giải phương trình: $(2x+7)\sqrt{2x+7}=x^2+9x+7$.

Bài tập 106. Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=2x$.

HD: Nhân hai vế cho $\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}\right)... \Rightarrow \left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)=0$.

2/ Biến đổi về tổng hai số không âm

Thí dụ 38. Giải phương trình: $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \geq -1$.

$(*) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 14 - 4\sqrt{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4\right) + \left(x^2 - 6x + 9\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2.2\sqrt{x+1} + 2^2\right] + \left(x-3\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1} - 2\right)^2 + \left(x-3\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 3$.

Thí dụ 39. Giải phương trình: $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$.

$(*) \Leftrightarrow 11 - x - 4\sqrt{x+3} - 2\sqrt{3-2x} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4\right) + \left(3 - 2x - 2\sqrt{3-2x} + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{3-2x} - 1\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2 = 0 \\ \sqrt{3-2x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

- So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = 1$.

Thí dụ 40. Giải phương trình: $13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \geq 1$.

$(*) \Leftrightarrow 16x - 13\sqrt{x-1} - 9\sqrt{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow 13\left(x - 1 - \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{4}\right) + 3\left(x + 1 - 3\sqrt{x+1} + \dfrac{9}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 13\left[\left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 2.\sqrt{x-1}.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + 3\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2.\sqrt{x+1}.\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - \frac{1}{2} = 0 \\ \sqrt{x+1} - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{4}$.

Thí dụ 41. Giải: $2\sqrt{x+1} + 6\sqrt{9-x^2} + 6\sqrt{\left(x+1\right)\left(9-x^2\right)} - x^3 - 2x^2 + 10x + 38 = 0 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\left(x+1\right)\left(9-x^2\right) \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(x+1-2\sqrt{x+1}+1\right) + \left(9-x^2-6\sqrt{9-x^2}+9\right) - x^3 - x^2 + 9x + 9 - 6\sqrt{\left(x+1\right)\left(9-x^2\right)} + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 + \left(\sqrt{9-x^2}-3\right)^2 + \left[\left(x+1\right)\left(9-x^2\right) - 6\sqrt{\left(x+1\right)\left(9-x^2\right)} + 9\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 + \left(\sqrt{9-x^2}-3\right)^2 + \left[\sqrt{\left(x+1\right)\left(9-x^2\right)} - 3\right]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{9-x^2} - 3 = \sqrt{\left(x+1\right)\left(9-x^2\right)} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 107. Giải phương trình: $x^2 - x + 6 = 4\sqrt{1-3x}$.

ĐS: $x = -1$.

Bài tập 108. Giải phương trình: $x^4 - 2x^2\sqrt{x^2-2x+16} + 2x^2 - 6x + 20 = 0$.

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 109. Giải phương trình: $x^2 - 2\left(x+1\right)\sqrt{3x+1} = 2\sqrt{2x^2+5x+2} - 8x - 5$.

HD: PT $\Leftrightarrow \left[\left(x+1\right) - \sqrt{3x+1}\right]^2 + \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Bài tập 110. Giải phương trình: $4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4\left(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x}\right)$.

Bài tập 111. Giải phương trình: $x+y-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+4=2\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2y-1}\right)$.

ĐS: $x=y=1$.

Bài tập 112. Giải phương trình: $2x\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=2x^2+x+2$.

ĐS: $x=1$.

Bài tập 113. Giải phương trình: $x^4-x^2+3x+5-2\sqrt{x+2}=0$.

ĐS: $x=-1$.

Bài tập 114. Giải phương trình: $x^4+2006x^3+1006009x^2+x-\sqrt{2x+2007}+1004=0$.

Đề Nghị Olympic 30/04 – THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm – Quảng Nam

HD: $PT \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x^2\left(x+1003\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2x+2007}-1\right)^2=0 \Rightarrow x=-1003$.

Bài tập 115. Giải phương trình: $\left(x-x^2\right)\left(x^2+3x+2007\right)-2005x\sqrt{4-4x}=30\sqrt[4]{x^2+x-1}+2006$.

Đề Nghị Olympic 30/04 – THPT chuyên Trần Đại Nghĩa – Tp. Hồ Chí Minh

HD: $PT \Leftrightarrow \left(x^2+x-1\right)^2+2005\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2+30\sqrt[4]{x^2+x-1}=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 116. Giải phương trình: $4x^2+14x+11=4\sqrt{6x+10}$.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 420 tháng 6 năm 2012

ĐS: $x=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{4}$.

3/ Sử dụng nhân liên hợp

Thí dụ 42. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x} \quad (*)$

Đề thi thử Đại học lần 1 khối D năm 2013 – Trường THPT Lê Xoay

✍ **Nhận xét**:

Sử dụng máy tính, ta tìm được một nghiệm là $x=\dfrac{1}{2}$ và ta có:

$\begin{cases}\left(3x\right)-\left(x+1\right)=2x-1\\ 4x^2-1=\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)\end{cases}$ nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x\geq 0$.

$(*) \Leftrightarrow \left(4x^2-1\right)+\left(\sqrt{3x}-\sqrt{x+1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(2x-1\right)\left(2x+1\right)+\frac{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-1\right)\left(2x+1\right)+\frac{\left(2x-1\right)}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-1\right)\left(2x+1+\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}\right)=0 \quad \left(1\right)$$

- Ta có: $\forall x \ge 0 \Rightarrow 2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}>0$ nên $\left(1\right) \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$.

Thí dụ 43. Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6 \qquad \left(*\right)$

Đề thi Đại học khối A năm 2007

✍ Nhận thấy rằng: $\begin{cases}\left(2x-3\right)-x=x-3\\ 2x-6=2\left(x-3\right)\end{cases}$ nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge \dfrac{3}{2}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \frac{x-3}{\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)}-2\left(x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2 \quad \left(1\right)\end{array}\right.$$

$$x \ge \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{2x-3}+\sqrt{x} \ge \sqrt{\frac{3}{2}}>1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}<1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2 \ \left(VN\right).$$

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Thí dụ 44. Giải phương trình: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1 \qquad \left(*\right)$

Đề thi thử Đại học lần 1 khối A, B năm 2013 – Trường THPT Hà Trung – Thanh Hóa

✍ **Nhận xét**:

Sử dụng $ALPHA-CALC$ cho biểu thức: $f\left(x\right)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}-\left(2x^2-5x-1\right)$ với các giá trị nguyên trong khoảng tập xác định $x \in \left[2;4\right]$, ta nhận được $f\left(x\right)=0$ khi $x=3$, nghĩa là $x=3$ là một nghiệm của phương trình.

Một cách tự nhiên, ta suy nghĩ tách ghép phù hợp sao cho khi nhân lượng liên hợp xuất hiện nhân tử $\left(x-3\right)$ hoặc bội của nó.

Ta không nên ghép cặp $\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)=\dfrac{2\left(x-3\right)}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$ với nhau, mặc dù nó xuất hiện nhân tử $\left(x-3\right)$ và đặc biệt là biểu thức $\left(2x^2-5x-1\right)$ không xuất hiện $\left(x-3\right)$. Hơn nữa, sau khi nhân liên hợp nó xuất hiện hạng tử $\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}$ dưới mẫu số mà chưa có thể khẳng định được âm hay dương trong tập xác định của x, điều đó sẽ gây khó khăn cho ta khi giải quyết (đánh giá) biểu thức $g\left(x\right)=0$ trong $\left(x-3\right).g\left(x\right)=0$.

Do đó, ta suy nghĩ đi tìm hai số $\alpha,\ \beta>0$ trong hai biểu thức $\left(\sqrt{x-2}-\alpha\right),\ \left(\sqrt{4-x}-\beta\right)$ để sau khi nhân lượng liên hợp, cả hai đều xuất hiện $\left(x-3\right)$. Vì vậy, hai số $\alpha,\ \beta>0$ phải thỏa mãn đồng nhất: $\begin{cases}\dfrac{\left(\sqrt{x-2}-\alpha\right)\left(\sqrt{x-2}+\alpha\right)}{\sqrt{x-2}+\alpha}=\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+\alpha}\\ \dfrac{\left(\sqrt{4-x}-\beta\right)\left(\sqrt{4-x}+\beta\right)}{\sqrt{4-x}+\beta}=\dfrac{x-3}{\sqrt{4-x}+\beta}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2-\alpha^2=x-3\\4-x-\beta^2=x-3\\\alpha,\beta>0\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\beta=1$. Nên ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $2\le x\le 4$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{4-x}-1\right)-\left(2x^2-5x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}-\left(x-3\right)\left(2x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-3\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}-2x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}=2x+1\quad\left(1\right)\end{array}\right.$

- Xét hàm số $f\left(x\right)=2x+1$ trên $x\in\left[2;4\right]$ thấy $f\left(x\right)=2x+1\ge5\quad\left(2\right)$

- Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}$ trên $x\in\left[2;4\right]$.

$g'\left(x\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}+1\right)}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}\left(\sqrt{4-x}+1\right)}<0,\ \forall x\in\left[2;4\right]$.

$\Rightarrow g\left(x\right)$ nghịch biến và $\max\limits_{\left[2;4\right]}g\left(x\right)=g\left(2\right)=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\quad\left(3\right)$

- Từ $(2),(3) \Rightarrow 2$ hàm số $f(x),\ g(x)$ có đồ thị không thể cắt nhau. Do đó (1) vô nghiệm.
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Thí dụ 45. Giải phương trình: $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2} \quad (*)$

Đề dự bị Đại học khối B năm 2008

✍ Nhận thấy: $(10x+1) - (9x+4) = (3x-5) - (2x-2) = x - 3$ nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge \dfrac{5}{3}$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{10x+1} - \sqrt{9x+4}\right) + \left(\sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10x+1-(9x+4)}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}} + \frac{3x-5-(2x-2)}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}} + \frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right) = 0$$

Vì $\forall\ x \ge \dfrac{5}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}} + \dfrac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}} > 0$ nên $(1) \Leftrightarrow x = 3$.

- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Thí dụ 46. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3(x^2-x-1)} - \sqrt{x^2-3x+4} \quad (*)$

Đề thi học sinh giỏi tỉnh Lâm Đồng năm 2008

✍ Nhận thấy $\begin{cases}(3x^2-5x+1) - (3x^2-3x-3) = -2(x-2)\\ (x^2-2) - (x^2-3x+4) = 3(x-2)\end{cases}$. Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{3x^2-3x-3}\right) - \left(\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2-3x+4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}} - \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{-2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}} - \frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}} + \dfrac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

- Ta có: $\dfrac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}} + \dfrac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} > 0,\ \forall x$ xác định.

- Thay $x = 2$ vào phương trình $(*) \Rightarrow (*)$ thỏa. Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Thí dụ 47. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 1 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

Cách giải 1. Nhân lượng liên hợp

- Vì $x = -1$ không là nghiệm phương trình nên

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2 = \frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{\left(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2\right)} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2} - \frac{1}{x + 1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2} = \dfrac{1}{x + 1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ \sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2 = x + 1 \ (\text{VN}) \end{array}\right..$$

- Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

✪ **Nhận xét**:

Vấn đề đặt ra là làm sao tôi nhận ra được nhân tử chung là $\left(x^2 - 2x - 1\right)$ để điền số -2 vào hai vế ???

Ý tưởng xuất phát từ việc tìm số α sao cho $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \alpha = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1} - \alpha, \ (\alpha > 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 3 - \alpha^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + \alpha} = \frac{x^2 + 1 - \alpha(x + 1)}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + \left(3 - \alpha^2\right)}{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + \alpha} = \frac{x^2 - \alpha x + (1 - \alpha)}{x + 1}.$$

Đến đây, ta chỉ việc xác định α sao cho

$$x^2 - 2x + \left(3 - \alpha^2\right) = x^2 - \alpha x + (1 - \alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -\alpha \\ 3 - \alpha^2 = 1 - \alpha \\ \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Cách giải 2. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

- Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3} \Rightarrow t^2 = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow x^2 = t^2 + 2x - 3$.

$(*) \Leftrightarrow (x+1)t = t^2 + 2x - 2$

$\Leftrightarrow t^2 - (x+1)t + (2x-2) = 0 \quad (1)$

- Ta xem (1) như là phương trình bậc hai với ẩn là t và x là tham số, lúc đó:

$$\Delta = x^2 + 2x + 1 - 8x + 8 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{x+1+x-3}{2} = x - 1 \\ t = \dfrac{x+1-x+3}{2} = 2 \end{array}\right..$$

- Với $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3} = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 \quad (VN)$.
- Với $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.
- Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Thí dụ 48. Giải phương trình: $(3x+1)\sqrt{x^2+3} = 3x^2 + 2x + 3 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

Do $x = -\dfrac{1}{3}$ không là nghiệm phương trình, nên với $x \neq -\dfrac{1}{3}$, ta được:

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = \dfrac{3x^2+2x+3}{3x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - 2x = \dfrac{3x^2+2x+3}{3x+1} - 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+3-4x^2}{\sqrt{x^2+3}+2x} = \dfrac{3x^2+2x+3-6x^2-2x}{3x+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(1-x^2)}{\sqrt{x^2+3}+2x} = \dfrac{-3x^2+3}{3x+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(1-x^2)}{\sqrt{x^2+3}+2x} = \dfrac{3(1-x^2)}{3x+1}$

$\Leftrightarrow 2(1-x^2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}+2x} - \dfrac{1}{3x+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}+2x} = \dfrac{1}{3x+1} \quad (1) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} + 2x = 3x + 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2+3 = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

- Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

Nhận xét:

Để đặt được số $-2x$ vào hai vế, ta xét dạng tổng quát

$\sqrt{x^2+3} - (\alpha x + \beta) = \dfrac{3x^2+2x+3}{3x+1} - (\alpha x + \beta)$ và sau đó sử dụng đồng nhất để tìm hai thực α, β sao cho xuất hiện nhân tử chung.

Thí dụ 49. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \quad (*)$

Đề thi Đại học khối B năm 2010

Bài giải tham khảo

Nhận xét:

Nhận thấy phương trình có 1 nghiệm $x = 5$ $(\text{SHIFT} - \text{SOLVE hay ALPHA} - \text{CALC})$, trong khoảng điều kiện: $x \in \left[-\dfrac{1}{3}; 6\right]$. Do đó, ta cần phải tách ghép để nhân liên hiệp sao cho xuất hiện nhân tử chung $(x-5)$ hoặc bội của nó.

Vì vậy, ta cần đi tìm hai số α, $\beta > 0$ thỏa mãn đồng nhất (sau khi nhân lượng liên hợp):

$$\begin{cases} \dfrac{(3x+1)-\alpha^2}{\sqrt{3x+1}+\alpha} = \dfrac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+\alpha} \\ \dfrac{\beta^2-(6-x)}{\beta+\sqrt{6-x}} = \dfrac{x-5}{\beta+\sqrt{6-x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1-\alpha^2 = 3x-15 \\ \beta^2 - 6 + x = x - 5 \\ \alpha, \beta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

Nên ta có lời giải sau:

- Điều kiện: $-\dfrac{1}{3} \le x \le 6$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1} - 4\right) + \left(1 - \sqrt{6-x}\right) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1)(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1\right) = 0 \quad (1)$$

- Ta có $\forall x \in \left[-\dfrac{1}{3}; 6\right] \Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x + 1 > 0$. Do đó $(1) \Leftrightarrow x = 5$.
- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Thí dụ 50. Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 21 = 3\sqrt[3]{4x-4} \quad (*)$

Nhận xét:

Nhận thấy phương trình có 1 nghiệm $x=3$ $\left(\mathrm{SHIFT-SOLVE\ hay\ ALPHA-CALC}\right)$, do đó, ta cần phải tách ghép để sau khi nhân liên hiệp sao cho xuất hiện nhân tử chung $\left(x-3\right)$ hoặc bội của nó.

Vì vậy, ta cần đi tìm số α đặt vào $3\left(\sqrt[3]{4x-4}-\alpha\right)$ để sau khi nhân liên hiệp bằng hằng đẳng thức: $\left(A-B\right)\left(A^2+AB+B^2\right)=A^3-B^3$, nó có dạng $12\left(x-3\right)$. Do đó, nó phải thỏa mãn đồng nhất

$3\left[\left(4x-4\right)-\alpha^3\right]=12\left(x-3\right)\Leftrightarrow 12x-12-3\alpha^3=12x-36\Leftrightarrow 3\alpha^3=24\Leftrightarrow \alpha=2$.

Ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$\left(*\right)\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[3]{4x-4}-2\right)-\left(2x^2-11x+15\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(4x-4-8\right)}{\sqrt[3]{\left(4x-4\right)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}-\left(2x-5\right)\left(x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left[\frac{12}{\sqrt[3]{\left(4x-4\right)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}-\left(2x-5\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x-5-\dfrac{12}{\sqrt[3]{\left(4x-4\right)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}=0 \quad \left(1\right)\end{array}\right.$$

- Với $x>3\Rightarrow 2x-5>1$, đặt $t=\sqrt[3]{4x-4}>2\Rightarrow t^2+2t+4>12$

  $\Rightarrow \dfrac{12}{t^2+2t+4}<1$ tức là $\left(2\right)$ vô nghiệm.

- Với $x<3\Leftrightarrow 2x-5<1$, đặt $t=\sqrt[3]{4x-4}<2\Rightarrow 0<t^2+2t+4>12$

  $\Rightarrow \dfrac{12}{t^2+2t+4}>1$ tức là $\left(2\right)$ vô nghiệm.

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

<u>Thí dụ 51.</u> Giải phương trình: $\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=x^3+x^2-4x-4+\left|x\right|+\left|x-1\right| \quad \left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $-2\le x\le 3$.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow \left(\sqrt{3-x}-\left|x-1\right|\right)+\left(\sqrt{2+x}-\left|x\right|\right)=\left(x+2\right)\left(x^2-x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(3-x\right)-x^2+2x-1}{\sqrt{3-x}+\left|x+1\right|}+\frac{\left(2+x\right)-x^2}{\sqrt{2+x}+\left|x\right|}-\left(x+2\right)\left(x^2-x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x+2}{\sqrt{3-x}+\left|x+1\right|}+\frac{-x^2+x+2}{\sqrt{2+x}+\left|x\right|}+\left(x+2\right)\left(-x^2+x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(-x^2+x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}+\left|x+1\right|}+\frac{1}{\sqrt{2+x}+\left|x\right|}+x+2\right)=0 \quad \left(1\right)$$

- Do $\forall x\in\left[-2;3\right]\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3-x}+\left|x+1\right|}+\frac{1}{\sqrt{2+x}+\left|x\right|}+x+2>0$

$\Rightarrow\left(1\right)\Leftrightarrow -x^2+x+2=0\Leftrightarrow x=-1\ \vee\ x=2$.

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-1\ \vee\ x=2$.

Thí dụ 52. Giải bất phương trình: $\frac{2x^2}{\left(3-\sqrt{9+2x}\right)^2}<x+21 \quad \left(*\right)$

Đại học Mỏ – Địa Chất năm 1999

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases}9+2x\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{9}{2}\le x\ne 0$.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{3-\sqrt{9+2x}}\right)^2<x+21\Leftrightarrow 2\left[\frac{x\left(3+\sqrt{9+2x}\right)}{-2x}\right]^2<x+21$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(3+\sqrt{9+2x}\right)^2}{2}<x+21\Leftrightarrow 9+6\sqrt{9+2x}+9+2x<2x+42$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9+2x}<4\Leftrightarrow 9+2x<16\Leftrightarrow x<\frac{7}{2}.$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $x\in\left[-\frac{9}{2};\frac{7}{2}\right)\setminus\left\{0\right\}$.

Thí dụ 53. Giải bất phương trình: $\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}>x-4 \quad \left(*\right)$

Đại học Sư Phạm Vinh năm 2001

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $1+x\ge 0\Rightarrow x\ge -1$.
- Nếu $\begin{cases}x\ge -1\\ x-4<0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x<4\Rightarrow\left(*\right)$ luôn đúng. Do đó: $x\in\left[-1;4\right)$ là một tập nghiệm của bất phương trình $\left(*\right)$.

- Khi $x \ge 4$:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ \left[\dfrac{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(1-\sqrt{1+x}\right)}\right]^2 > x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ \left[\dfrac{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)}{1-1-x}\right]^2 > x-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ \left(1-\sqrt{1+x}\right)^2 > x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ 1-2\sqrt{1+x}+1+x > x-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ \sqrt{1+x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ 1+x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[4;8\right).$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} x \in \left[-1;4\right) \\ x \in \left[4;8\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[-1;8\right).$

<u>Thí dụ 54.</u> Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3} \ge 2\sqrt{x^2-5x+4} \quad (*)$

Đại học Y Dược năm 2001 – Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

<u>Bài giải tham khảo</u>

Nhận xét: $\begin{cases} \left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2-5x+4\right)=2x-2=2\left(x-1\right) \\ \left(x^2-4x+3\right)-\left(x^2-5x+4\right)=x-1 \end{cases}$. Nên ta có lời giải sau:

- Điều kiện: $x \le 1 \ \vee \ x \ge 4$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-5x+4}\right)+\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-5x+4}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x-1\right)}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-5x+4}}+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+4}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-5x+4}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+4}}\right) \ge 0 \quad (1)$$

- Do $\left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 4 \end{array}\right.$ thì: $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-5x+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+4}} > 0$

nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là: $x \ge 4 \ \vee \ x = 1$.

<u>Thí dụ 55.</u> Giải bất phương trình: $\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\sqrt{2x+1} \ge \sqrt{2x+17} \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} \ge \sqrt{2x+17} - \sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} \ge \frac{\left(\sqrt{2x+17}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}\right)}{\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} \ge \frac{16}{\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1} \ge 4\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}\right)^2 \ge 16x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+17)(2x+1)} \ge 6x-9 \quad (\text{dạng } \sqrt{A} \ge B).$$

$$\Leftrightarrow .... \; x \in \left(\frac{3}{2};4\right].$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (0;4]$.

Thí dụ 56. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x} > 2\sqrt{3} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-2 \le x \le 4$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - 3\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{4-x}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3+3x^2+6x-11}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}+3\sqrt{3}} + \frac{x-1}{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)\left(2x^2+5x+11\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}+3\sqrt{3}} + \frac{x-1}{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{63}{8}}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}+3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}}\right] > 0$$

$$\Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1.$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (1;4]$.

Thí dụ 57. Giải bất phương trình: $9\left(x^2+1\right) \le (3x+7)\left(1-\sqrt{3x+4}\right)^2 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge -\dfrac{4}{3}$.

$$(*) \Leftrightarrow 9(x+1)^2\left(1+\sqrt{3x+4}\right)^2 \le (3x+7)\left[\left(1-\sqrt{3x+4}\right)\left(1+\sqrt{3x+4}\right)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 9(x+1)^2\left(1+\sqrt{3x+4}\right)^2 \le 9(3x+7)(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left[\left(1+\sqrt{3x+4}\right)^2 - 3x - 7\right] \le 0 \quad (1)$$

- Khi $x=-1 \Rightarrow (1)$: luôn đúng.
- Khi $\begin{cases} x \ne -1 \\ x \ge -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+4} \le 1 \\ x \ge -\dfrac{4}{3} \\ x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} \le x < -1$.
- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x \in \left[-\dfrac{4}{3}; -1\right]$.

Thí dụ 58. Giải bất phương trình: $2\sqrt{1-\dfrac{2}{x}} + \sqrt{2x-\dfrac{8}{x}} \ge x \quad (1)$

Bài giải tham khảo

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x-2}{x}} + \sqrt{\frac{2x^2-8}{x}} \ge x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x-2}{x}} + \sqrt{\frac{2(x-2)(x+2)}{x}} \ge x \quad (2)$$

- Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x} \ge 0 \\ \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le x < 0 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$.
- Với: $-2 \le x < 0$: thì (2) luôn đúng.
- Với: $x \ge 2$:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x}}.\left(2+\sqrt{2x+4}\right) \ge x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x}}.\frac{\left(2+\sqrt{2x+4}\right)\left(2-\sqrt{2x+4}\right)}{2-\sqrt{2x+4}} \ge x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x}}.\frac{(-4x)}{2-\sqrt{2x+4}} \ge x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}.\frac{4}{\sqrt{2x+4}-2} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-2} \ge \sqrt{x}\left(\sqrt{2x+4}-2\right),\quad \left(\text{do}: \sqrt{2x+4}-2>0,\ \forall x \ge 2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-2} \ge \sqrt{2x^2+4x}-2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-2}+2\sqrt{x} \ge \sqrt{2x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow 16x-32+4x+16\sqrt{x\left(x-2\right)} \ge 2x^2+4x$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-4\sqrt{x^2-2x}+4 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2-4\sqrt{x^2-2x}+4 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x}-2\right)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x}-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-4=0$$

$$\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{5}$$

- Do $x \ge 2 \Rightarrow x=1+\sqrt{5}$.
- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[-2;0\right) \cup \left\{1+\sqrt{5}\right\}$.

<u>Thí dụ 59.</u> Giải bất phương trình: $\left(x-1\right)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1} \ge 2\left(x+1\right) \quad \left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+2x\left(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+\frac{2x\left(x+1\right)\left(3x-1\right)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left[\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+\frac{2x\left(3x-1\right)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right] \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(\frac{4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}+7x^2-4x+5}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right) \le 0.$$

Do $7x^2-4x+5=7\left(x-\frac{4}{7}\right)^2+\frac{31}{7}>0$ nên phương trình $\Leftrightarrow x+1 \le 0 \Leftrightarrow x \le -1$.

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(-\infty;-1\right]$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 117. Giải phương trình: $\dfrac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \sqrt{3x+1} - 1$.

ĐS: $x = 0 \vee x = 5$.

Đại học Tổng Hợp năm 1992

Bài tập 118. Giải phương trình: $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = x$.

Đề thi thử Đại học lần 1 năm 2013 – THPT Dương Đình Nghệ – Thanh Hóa

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 119. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$.

ĐS: $x = 1 \vee x = 2$. Yêu cầu: Giải theo hai cách: nhân lượng liên hợp và đặt ẩn phụ.

Bài tập 120. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x$.

ĐS: $x = 4$.

Bài tập 121. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4$.

ĐS: $x = -4 \vee x = 0$.

Bài tập 122. Giải phương trình: $x + \sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{x+2}$.

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 123. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8}$.

Đại học Ngoại Thương năm 1997 – Đề số 3

ĐS: $x = 1$. Hãy nêu ra dạng tổng quát, phương pháp chung nhân lượng liên hợp cho dạng này và áp dụng cho hai bài kế tiếp.

Bài tập 124. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 125. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 24} - \sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2$.

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 126. Giải phương trình: $4\sqrt{x+2} + \sqrt{22 - 3x} = x^2 + 8$.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 400 tháng 10 năm 2010

ĐS: $x = -1 \vee x = 2$.

Bài tập 127. Giải phương trình: $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \dfrac{x+3}{5}$.

Học Viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông năm 2001

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 128. Giải phương trình: $\left(\sqrt{1+x} + 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 2x - 5\right) = x$.

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 129. Giải phương trình: $3\left(2+\sqrt{x-2}\right)=2x+\sqrt{x+6}$.

Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự năm 2001

ĐS: $x=3 \vee x=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 130. Giải phương trình: $9\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\right)=x+3$.

Đề thi học sinh giỏi Hà Nội năm 2010

ĐS: $x=6$.

Bài tập 131. Giải phương trình: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-2x^2+7x+2=0$.

ĐS: $x=4$.

Bài tập 132. Giải phương trình: $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$.

ĐS: $x=-3$.

Bài tập 133. Giải phương trình: $\left(x+3\right)\sqrt{2x^2+1}=x^2+x+3$.

ĐS: $x=0 \vee x=-5+\sqrt{13}$.

Bài tập 134. Giải phương trình: $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$.

ĐS: $x=2$.

Bài tập 135. Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=x^2-x-2$.

HD: PT $\Leftrightarrow \left(x^2-3x+1\right)\left(1+\dfrac{1}{x-1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x-2+\sqrt{3-x}}\right)=0$.

Bài tập 136. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6$.

ĐS: $x=-24 \vee x=-88$.

Bài tập 137. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}$.

ĐS: $x=1 \vee x=-\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 138. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$.

ĐS: $x=\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 139. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$.

ĐS: $x=2$.

Bài tập 140. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2}+3-\sqrt{6-5x}-8=0$.

ĐS: $x=-2$.

Bài tập 141. Giải phương trình: $3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2 + 8} - 2 = \sqrt{x^2 + 15}$.

ĐS: $x = \pm 1$.

Bài tập 142. Giải phương trình: $x^2 - 3x - 4 = \sqrt{x - 1}\left(x^2 - 4x - 2\right)$.

ĐS: $x = 2 \vee x = 5$.

Bài tập 143. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 16x + 18} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 4$.

HD: $PT \Leftrightarrow \dfrac{-2\left(x^2 - 1\right)}{\sqrt{2x^2 + 16x + 18} + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \vee x = \dfrac{-32 + 3\sqrt{57}}{7}$.

Bài tập 144. Giải phương trình: $\sqrt{5x - 1} + 1 = 2x^2 + 3x + \sqrt[3]{x - 9}$.

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 145. Giải phương trình: $\left(x - 1\right)\left(2\sqrt{x - 1} + 3\sqrt[3]{x + 6}\right) = x + 6$.

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 146. Giải phương trình: $\sqrt{3x + 3} - \sqrt{5 - 2x} - x^3 + 3x^2 + 10x - 26 = 0$.

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 147. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$.

Đề thi thử Đại học lần 2 năm 2013 – THPT chuyên Đại học Sư Phạm Hà Nội

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 148. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 2}$.

ĐS: $x = -2$.

Bài tập 149. Giải phương trình: $3\sqrt{x^2 + x - 2} + 7\sqrt{x + 2} = 9\sqrt{x - 1} + 11$.

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 150. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2 - 1} + x = \sqrt{x^3 - 2}$.

ĐS: $x = 3$.

Bài tập 151. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2} + 2.\sqrt[3]{x} - \left(x - 4\right)\sqrt{x - 7} - 3x + 28 = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow \left(x - 8\right)\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} - \dfrac{x - 4}{\sqrt{x - 7} + 1} - 4\right) = 0 \Rightarrow x = 8$.

Bài tập 152. Giải phương trình: $\dfrac{1 + 3\sqrt{x}}{4x + \sqrt{2 + x}} - 1 = 0$.

HSG – THPT Thái Phiên – Tp. Đà Nẵng

ĐS: $x = \dfrac{1}{4} \vee x = \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{8}$.

Bài tập 153. Giải phương trình: $\sqrt[4]{x + 8} + \sqrt{x + 4} = \sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x}$.

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 154. Giải phương trình: $\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)=3x^2$.

ĐS: $x = 0 \vee x = 1$.

Bài tập 155. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x$.

ĐS: $x = 5 \vee x = \dfrac{19}{3}$.

Bài tập 156. Giải phương trình: $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$.

ĐS: $x = -2 \vee x = 1$.

Bài tập 157. Giải phương trình: $\sqrt[3]{162x^3+2}-\sqrt{27x^2-9x+1}=1$.

ĐS: $x = \dfrac{1}{3}$.

Bài tập 158. Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$.

ĐS: $x = 1 \vee x = 2-\sqrt{2}$.

Bài tập 159. Giải phương trình: $\sqrt[3]{12x^2+46x-15}-\sqrt[3]{x^3-5x+1}=2x+2$.

ĐS: $x = 2 \vee x = \pm\sqrt{2}-1$.

Bài tập 160. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\dfrac{5(x-3)}{\sqrt{2x^2+18}},\ (x\in\mathbb{R})$.

Đề thi thử Đại học lần 1 năm 2013 – THPT chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương

ĐS: $x = -1 \vee x = \dfrac{3}{2} \vee x = 3$.

Bài tập 161. Giải phương trình: $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$.

ĐS: $x = \dfrac{2}{3} \vee x = \pm 2$.

Bài tập 162. Giải phương trình: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$.

HD: $\text{PT} \Leftrightarrow \left(x^2-2x+7\right)+\left[3(x+2)-(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}\right]=0 \Rightarrow x = 1\pm 2\sqrt{2}$.

Bài tập 163. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-6x-5}=\sqrt{(2-x)^5}+\sqrt{(2-x)}\left(2x^2-x-10\right)$.

ĐS: $x = \dfrac{5-\sqrt{109}}{6}$.

Bài tập 164. Giải phương trình: $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$.

ĐS: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 165. Giải: $\left(x-1\right)\sqrt{2x^2-5x-15}+\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^2+19}{2}} = 2x^3-7x^2-12x+17+\sqrt{7x}$.

ĐS: $x = \dfrac{5+\sqrt{177}}{4}$.

Bài tập 166. Giải phương trình: $\sqrt{26}\sqrt{10x+1}+\sqrt{\dfrac{26}{31}}\sqrt{3x-5} = \dfrac{28}{\sqrt{26}}\sqrt{9x+4}-\dfrac{5}{\sqrt{806}}\sqrt{2x-2}$.

ĐS: $x = 3$.

Bài tập 167. Giải phương trình: $\left(x+3\right)\sqrt{x^2+x+2} = x^2+3x+4$.

Bài tập 168. Giải phương trình: $\left(x+1\right)\sqrt{x+8} = x^2+x+4$.

Bài tập 169. Giải phương trình: $\left(2x+1\right)\sqrt{x^2+3} = 3x^2+x+2$.

Bài tập 170. Giải phương trình: $\left(3x+1\right)\sqrt{x^2+x+2} = 3x^2+3x+2$.

Bài tập 171. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-3x+1} = \dfrac{x^2-1}{2x-3}$.

Bài tập 172. Giải phương trình: $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x} = 2x^2+3x-1$.

Bài tập 173. Giải phương trình: $4\left(x+1\right)^2 = \left(2x+10\right)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$.

Bài tập 174. Giải phương trình: $2x^2 = \left(x+9\right)\left(2-\sqrt{9+2x}\right)^2$.

Bài tập 175. Giải phương trình: $2x = \left(\sqrt{1-x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

Bài tập 176. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}+x = \dfrac{x+3}{x^2-6}+5$.

Bài tập 177. Giải: $\sqrt{2x^2-5}+2x^2-5+\sqrt[3]{4x^4-29x^2+25} = \sqrt{3x}+\sqrt{12x^3-9x^2-30x}$.

Bài tập 178. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2-7x+10} = x+\sqrt{x^2-12x+20}$.

Bài tập 179. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{2x} = \dfrac{7}{4}$.

Bài tập 180. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+2$.

Bài tập 181. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-1}-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}$.

Bài tập 182. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+3} = 2\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$.

GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP

Bài tập 183. Giải bất phương trình: $\dfrac{6x^2}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2} > 2x + \sqrt{x-1} + 1$.

Đề thi thử Đại học khối A 2013 – THPT chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An

ĐS: $x \in \left(10 + 4\sqrt{5}; +\infty\right)$.

Bài tập 184. Giải bất phương trình: $4\left(x+1\right)^2 < \left(2x+10\right)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$.

Đề thi thử Đại học khối A năm 2013 – THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang

ĐS: $x \in \left[-\dfrac{3}{2}; 3\right) \setminus \left\{-1\right\}$.

Bài tập 185. Giải bất phương trình: $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$.

Đại học Ngoại Ngữ Hà Nội năm 1998

ĐS: $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right] \setminus \left\{0\right\}$.

Bài tập 186. Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \ge x$.

Đại học Ngoại Thương cơ sở II Tp. Hồ Chí Minh khối A – B năm 2001

ĐS: $x \in \left[0;1\right]$.

Bài tập 187. Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}\right)\left(1 + \sqrt{x^2+2x-3}\right) \ge 4$.

Đề thi thử Đại học lần 1 năm 2013 – THPT Đông Sơn I

ĐS: $x \ge 2$.

Bài tập 188. Giải bất phương trình: $\dfrac{3x}{\sqrt{3x+10}} < \sqrt{3x+1} - 1$.

Học Viện Hàng Không năm 1997 – 1998

ĐS: $x \in \left(0;5\right)$.

Bài tập 189. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} > \dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$.

ĐS: $x \in \left[-2; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}; 2\right]$.

Bài tập 190. Giải bất phương trình: $\dfrac{9x^2}{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)^2} > 2x + 1$.

Đại học Kiến Trúc Hà Nội năm 1998

ĐS: $x \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right) \setminus \{0\}$.

Bài tập 191. Giải bất phương trình: $\frac{x^2}{\left(x+1-\sqrt{x+1}\right)^2} < \frac{x^2+3x+18}{\left(x+1\right)^2}$.

ĐS: $x \in \left(-1;3\right) \setminus \{0\}$.

Bài tập 192. Giải bất phương trình: $4\left(x+1\right)^2 < \left(2x+10\right)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$.

Đề 49/III$_2$ – Bộ đề tuyển sinh Đại học Cao đẳng

ĐS: $x \in \left[-\frac{3}{2};3\right) \setminus \{-1\}$.

Bài tập 193. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+1} \ge \sqrt{x-3} + \frac{x+4}{\sqrt{x+12}}$.

HD: Liên hợp ... $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} \le \sqrt{x+12}$.

Bài tập 194. Giải bất phương trình: $2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 \le \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$, $\left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Đề thi thử Đại học 2013 lần 2 khối A, B – THPT Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp

ĐS: $x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

Bài tập 195. Giải bất phương trình: $\frac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}} > 1$.

ĐS: $x \in \left(-\infty;-2\right] \cup \left[\frac{\sqrt{13}-1}{6};+\infty\right)$.

Bài tập 196. Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3}} \ge 1$.

ĐS: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Bài tập 197. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2+11x+15} + \sqrt{x^2+2x-3} \ge x+6$.

HD: Liên hợp $\Leftrightarrow \frac{2x^2+11x-15-\left(x+\frac{9}{2}\right)^2}{\sqrt{2x^2+11x+15}+x+\frac{9}{2}} + \frac{x^2+2x-3-\frac{9}{4}}{\sqrt{x^2+2x-3}+\frac{3}{2}} \ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \frac{3}{2} \\ x \le -\frac{7}{2} \end{array}\right.$.

Bài tập 198. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x^2-7x+3} + \sqrt{x^2-3x+4} > \sqrt{x^2-2} + \sqrt{3x^2-5x-1}$.

Đại học Cảnh Sát Nhân Dân năm 2001

ĐS: $x \in \left(-\infty;-\sqrt{2}\right] \cup \left[\dfrac{5+\sqrt{37}}{6};2\right)$.

Bài tập 199. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+3}-\sqrt{x} \geq \sqrt[3]{2x-1}$.

HD: Liên hợp $\Leftrightarrow 3 \geq \sqrt[3]{2x-1}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right) \Rightarrow x \in \left[0;1\right]$.

Bài tập 200. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+35} < 5x-4+\sqrt{x^2+24}$.

ĐS: $x > 1$.

Bài tập 201. Giải bất phương trình: $\dfrac{\left(3x+2\right)^2}{\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2} < x+2$.

Bài tập 202. Giải bất phương trình: $\dfrac{25x^2}{\left(\sqrt{6x+3}+\sqrt{x+3}\right)^2} \geq x$.

Bài tập 203. Giải bất phương trình: $\dfrac{16x^2}{\left(\sqrt{4x+1}-1\right)^2} \geq 4\left(3x-2\right)$.

Bài tập 204. Giải bất phương trình: $\dfrac{9x^2}{\left(\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x-1}\right)^2} \leq 4x+5$.

Bài tập 205. Giải bất phương trình: $\dfrac{\left(x+2\right)^2}{\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}\right)^2} \leq x+8$.

Bài tập 206. Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}\right) > 3$.

Bài tập 207. Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-3}\right) < 3$.

Bài tập 208. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} \geq 1$.

Bài tập 209. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+8}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right) \geq 3$.

Bài tập 210. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}\right) \geq 2x-11$.

Bài tập 211. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-2}\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x+3}\right) \leq x-8$.

Bài tập 212. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x-3}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right) \leq 1$.

Bài tập 213. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x-8}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x}\right) > 2x-4$.

Bài tập 214. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+3}\left(\sqrt{2x-8}-\sqrt{7-x}\right)>3\left(x-5\right)$.

Bài tập 215. Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1}\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-3}\right)>1+x$.

Bài tập 216. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x-4}\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x-1}\right)<4x$.

Bài tập 217. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x-5}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-3}\right)<5-x$.

Bài tập 218. Giải bất phương trình: $\sqrt{1-2x}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{1-x}\right)<2x+3$.

Bài tập 219. Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{3x+6}+\sqrt{3x-3}\right)\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}\right)\le 3$.

Bài tập 220. Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{x+12}+\sqrt{x-6}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4}\right)\ge 6$.

4/ Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Thí dụ 60. Giải phương trình sau: $x^2+3x+1=\left(x+3\right)\sqrt{x^2+1}\quad\left(*\right)$

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối A – Học Viện Ngân Hàng khối A năm 2001

Bài giải tham khảo

- Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\ge 1\Rightarrow t^2=x^2+1$. Lúc đó:

$\left(*\right)\Leftrightarrow t^2+3x=\left(x+3\right)t\Leftrightarrow t^2-\left(x+3\right)t+3x=0\quad\left(1\right)$

- Lúc đó, ta xem $\left(1\right)$ là phương trình bậc hai theo biến t và x là tham số.

$$\Delta=\left(x+3\right)^2-12x=x^2-6x+9=\left(x-3\right)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{x+3+x-3}{2}=x\\ t=\dfrac{x+3-x+3}{2}=3\end{array}\right..$$

- Với $t=x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2+1=x^2\end{cases}$: vô nghiệm.

- Với $t=3\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=3\Leftrightarrow x^2+1=9\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$.

- Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\pm 2\sqrt{2}$.

Thí dụ 61. Giải phương trình sau: $\left(4x-1\right)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1\quad\left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow 2x^3=2t^2-2$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow\left(4x-1\right)t=2t^2+2x-1\Leftrightarrow 2t^2-\left(4x-1\right)t+\left(2x-1\right)=0\quad\left(1\right)$

- Lúc đó, ta xem $\left(1\right)$ là phương trình bậc hai theo biến t và x là tham số.

$$\Delta = (4x-1)^2 - 8(2x-1) = (4x-3)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4x-1+4x-3}{4} = 2x-1 \\ t = \dfrac{4x-1-4x+3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

- Với $t = 2x-1 \Rightarrow \sqrt{x^3+1} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.
- Với $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x^3+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^3 = -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.
- Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2 \vee x = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 221. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$.

ĐS: $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Bài tập 222. Giải phương trình: $x^2 + \left(3 - \sqrt{x^2+2}\right)x = 1 + 2\sqrt{x^2+2}$.

ĐS: $x = \pm\sqrt{14}$.

Bài tập 223. Giải phương trình: $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2 - 2x - 1$.

ĐS: $x = -1 \pm \sqrt{6}$.

Bài tập 224. Giải phương trình: $(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 5x^2 + \dfrac{3}{2}x - 3$.

ĐS: $x = \pm 1 \vee x = 5$.

Bài tập 225. Giải phương trình: $3\left(\sqrt{2x^2+1} - 1\right) = x\left(1 + 3x + 8\sqrt{2x^2+1}\right)$.

ĐS: $x = 0$.

Bài tập 226. Giải phương trình: $2x^2 - 5x + 2 = 4\sqrt{2(x^3 - 21x - 20)}$.

ĐS: $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{193}}{4} \vee x = \dfrac{17 \pm 3\sqrt{73}}{4}$.

Bài tập 227. Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$.

Đề thi thử Đại học đợt 3 năm 2013 – THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An

ĐS: $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Bài tập 228. Giải phương trình: $(3x+2)\sqrt{2x-3} = 2x^2 + 3x - 6$.

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 229. Giải phương trình: $4\sqrt{x+1} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$.

ĐS: $x = -\frac{3}{5} \vee x = 0$.

Bài tập 230. Giải phương trình: $2\left(2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) - \sqrt{1-x^4} = 3x^2 + 1$.

ĐS: $x = 0$.

Bài tập 231. Giải phương trình: $x^2 + 2\left(x-1\right)\sqrt{x^2+x+1} - x + 2 = 0$.

ĐS: $x = 0 \vee x = -1$.

Bài tập 232. Giải phương trình: $\left(x+1\right)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2 + 1$.

ĐS: $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Bài tập 233. Giải phương trình: $x^2 - 4x + \left(x-3\right)\sqrt{x^2-x-1} - 1 = 0$.

ĐS: $x = -1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Bài tập 234. Giải phương trình: $6x^2 - 10x + 5 - \left(4x-1\right)\sqrt{6x^2-6x+5} = 0$.

ĐS: $x = \frac{\sqrt{59} - 3}{10}$.

C – GIẢI PHƯƠNG TRÌNH & BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐẶT ẨN SỐ PHỤ



I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Đặt một ẩn phụ

Tìm mối liên hệ giữa các biến để đặt ẩn phụ thích hợp. Một số dạng cơ bản thường gặp:

① $a.f(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0 \xrightarrow{PP} \begin{cases} t = \sqrt{f(x)},\ t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$.

② $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x).g(x)} = h(x) \xrightarrow{PP} t = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$.

2/ Đặt hai ẩn phụ

Thông thường, ta tìm mối liên hệ giữa biến để đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp (đồng bậc) hoặc hệ phương trình đối xứng loại 2, đẳng cấp,… Ta thường gặp một số dạng cơ bản sau:

① $\alpha.\sqrt[n]{a - f(x)} + \beta.\sqrt[m]{b + f(x)} = c \xrightarrow{PP}$ đặt $\begin{cases} u = \sqrt[n]{a - f(x)} \\ v = \sqrt[m]{b + f(x)} \end{cases}$.

② $\left[\begin{array}{l} a.\sqrt[n]{A^2} + b.\sqrt[n]{AB} + c.\sqrt[n]{B^2} = 0 \\ a.A(x) + b.B(x) = c\sqrt{A(x).B(x)} \\ \alpha.A + \beta.B = \sqrt{mA^2 + nB^2} \end{array}\right. \xrightarrow{PP}$ đặt u, v $\Rightarrow PT: u^2 + \alpha uv + \beta v^2 = 0$.

③ $x^n + a = b\sqrt[n]{bx - a} \xrightarrow{PP} y = \sqrt[n]{bx - a}$ đưa về hệ đối xứng loại II: $\begin{cases} x^n - by + a = 0 \\ y^n - bx + a = 0 \end{cases}$.

④ $\begin{cases} \sqrt{ax + b} = cx^2 + dx + e \\ a \neq 0,\ c \neq 0,\ a \neq \frac{1}{c} \end{cases} \xrightarrow{PP}$ đặt $\sqrt{ax + b} = 2cy + d$ đưa về hệ đối xứng loại II.

✍ Lưu ý:

— Sau khi đặt ẩn phụ, ta cần đi tìm điều kiện cho ẩn phụ, tức là đi tìm miền xác định cho bài toán mới. Tùy vào mục đích của ẩn phụ mà ta phải đi tìm điều kiện cho hợp lý (dễ, không gây sai sót), chung qui, ta có hai cách tìm điều kiện: tìm điều kiện đúng và tìm điều kiện thừa.

— Cần lưu ý một số khai triễn và biến đổi sau:

- $x^3 \pm 1 = (x \pm 1)(x^2 \mp x + 1)$ hay tổng quát hơn: $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + b)$.
- $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.
- $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}.x + 1)(x^2 - \sqrt{2}.x + 1)$.
- $4x^4 + 1 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$.
- $u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u - 1)(v - 1) = 0$.
- $au + bv = ab + vu \Leftrightarrow (u - b)(v - a) = 0$.

II – CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

1/ Đặt một ẩn phụ

Thí dụ 62. Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31 \quad (*)$

Đại học Cảnh Sát Nhân Dân năm 1999

Bài giải tham khảo

- Đặt $t = \sqrt{x^2 + 11}, \ (t \geq 11) \Rightarrow t^2 = x^2 + 11 \Rightarrow x^2 = t^2 - 11$.

$$(*) \Leftrightarrow (t^2 - 11) + t = 31 \Leftrightarrow t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 6 & (N) \\ t = -7 & (L) \end{array}\right.$$

- Với $t = 6 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 11} = 6 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$.
- Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = -5 \ \vee \ x = 5$.

Thí dụ 63. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 4x + 1} = 1 - x^2 - 2x \quad (1)$

Cao đẳng sư phạm Trung Ương năm 2006

Bài giải tham khảo

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x^2 + 4x + 1) + \sqrt{2x^2 + 4x + 1} - \frac{3}{2} = 0 \quad (2)$$

- Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 4x + 1} \geq 0 \Rightarrow t^2 = 2x^2 + 4x + 1$. Lúc đó:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & \\ t = -3 & (L) \end{array}\right.$$

- Với $t = 1 \Rightarrow t^2 = 2x^2 + 4x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -2$.
- Vậy nghiệm của phương trình là $x = -2 \ \vee \ x = 0$.

Thí dụ 64. Giải bất phương trình: $(x + 1)(x + 4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} \quad (1)$

Học Viện Quan Hệ Quốc Tế khối D năm 2000

Bài giải tham khảo

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} \quad (2)$$

- Đặt $t = \sqrt{x^2 + 5x + 28} = \sqrt{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{87}{4}} \geq \frac{\sqrt{87}}{2} \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = t^2 - 24$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{\sqrt{87}}{2} \\ t^2 - 24 < 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{\sqrt{87}}{2} \\ t^2 - 5t - 24 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{\sqrt{87}}{2} \\ -3 < t < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{87}}{2} \leq t < 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 28} < 8 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 36 < 0 \Leftrightarrow -9 < x < 4.$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (-9; 4)$.

Thí dụ 65. Giải bất phương trình: $x\left(x-4\right)\sqrt{-x^2+4x}+\left(x-2\right)^2<2 \qquad \left(*\right)$

Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối D – Học Viện Ngân Hàng năm 1999

Bài giải tham khảo

$\left(*\right)\Leftrightarrow\left(x^2-4x\right)\sqrt{-x^2+4x}+x^2-4x+2<0 \qquad \left(1\right)$

- Đặt: $t=\sqrt{-x^2+4x}\ge 0\Rightarrow t=-x^2+4x$

$\left(1\right)\Leftrightarrow -t^2.t-t^2+2<0\Leftrightarrow t^3+t^2-2>0\Leftrightarrow t>1$

$\Leftrightarrow\sqrt{-x^2+4x}>1\Leftrightarrow -x^2+4x>1\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$.

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\right)$.

Thí dụ 66. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}+\sqrt{\left(x+2\right)\left(5-x\right)}=4 \qquad \left(*\right)$

Cao đẳng sư phạm Nha Trang năm 2002

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases}x+2\ge 0\\5-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le 5$.

- Đặt $0<t=1.\sqrt{x+2}+1.\sqrt{5-x}\overset{\text{B.C.S}}{\le}\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{\left(\sqrt{x+2}\right)^2+\left(\sqrt{5-x}\right)^2}=\sqrt{14}$.

$\Rightarrow t^2=7+2\sqrt{\left(x+2\right)\left(5-x\right)}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x+2\right)\left(5-x\right)}=\dfrac{t^2-7}{2}$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow t+\dfrac{t^2-7}{2}=4\Leftrightarrow t^2+2t-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\ \left(N\right)\\t=5\ \left(L\right)\end{array}\right.$.

- Với $t=3\Rightarrow\sqrt{\left(x+2\right)\left(5-x\right)}=\dfrac{t^2-7}{2}=1$

$\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(5-x\right)=1\Leftrightarrow -x^2+3x-9=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm 3\sqrt{5}}{2}$.

- So với điều kiện nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}\ \vee\ x=\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$.

Thí dụ 67. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16 \qquad \left(*\right)$

Đại học Mỏ – Địa Chất năm 1999

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases}2x+3\ge 0\\x+1\ge 0\\2x^2+5x+3=\left(x+1\right)\left(2x+3\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -1$.

- Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1},\ (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2+5x+3}$.

$(*) \Leftrightarrow t = t^2 - 4 - 16 \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = 5\ (N)\ \vee\ t = -4\ (L)$.

- Với $t = 5 \Leftrightarrow 25 = 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2+5x+3} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3} = 21 - 3x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21 - 3x \geq 0 \\ 4\left(2x^2+5x+3\right) = \left(21-3x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x^2 - 146x + 429 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 143 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Thí dụ 68. Giải bất phương trình: $\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{49x^2+7x-42} < 181 - 14x \quad (1)$

Đại học An Ninh khối A năm 2000

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} 7x+7 \geq 0 \\ 7x-6 \geq 0 \\ 49x^2+7x-42 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{6}{7}$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} + (7x+7) + (7x-6) < 182$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{7x+7}\right)^2 + 2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} + \left(\sqrt{7x-6}\right)^2\right] + \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} < 182$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}\right)^2 + \left(\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}\right) - 182 < 0 \quad (2)$$

- Đặt $t = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}$.

Do $x \geq \dfrac{6}{7} \Rightarrow t \geq t\left(\dfrac{6}{7}\right) = \sqrt{7.\dfrac{6}{7} + 7} + \sqrt{7.\dfrac{6}{7} - 6} = \sqrt{13} \Rightarrow t \geq \sqrt{13}$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{13} \\ t^2 + t - 182 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{13} \\ -14 \leq t \leq 13 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{13} \leq t \leq 13$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} \geq \sqrt{13},\ \forall x \geq \dfrac{6}{7} \\ \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} \leq 13 \end{cases} \Leftrightarrow 14x + 1 + 2\sqrt{(7x+7)(7x-6)} \leq 169$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(7x+7)(7x-6)} \leq 84 - 7x \Leftrightarrow \begin{cases} 84 - 7x \geq 0 \\ (7x+7)(7x-6) \geq 0 \\ (7x+7)(7x-6) \leq (84-7x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 12 \\ x \leq -1 \vee x \geq \dfrac{6}{7} \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -1\right) \cup \left(\dfrac{6}{7}; 6\right].$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(\frac{6}{7};6\right)$.

Thí dụ 69. Giải bất phương trình: $3\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} - 7 \quad (1)$

Đại học Thái Nguyên khối A – B năm 2000

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x > 0$.

$(1) \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{4x}\right) - 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - 7 > 0 \qquad (2)$

- Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = x + \frac{1}{4x} + 1 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} = t^2 - 1$.

Ta có: $t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}} \Rightarrow t \geq \sqrt{2}$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{2} \\ 2\left(t^2 - 1\right) - 3t - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{2} \\ 2t^2 - 3t - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{2} \\ t < -\frac{3}{2} \vee t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow t > 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 3 \Leftrightarrow 2x - 6\sqrt{x} + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} < \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \\ \sqrt{x} > \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 4 - \frac{3}{2}\sqrt{7} \\ x > 4 + \frac{3}{2}\sqrt{7} \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $x \in \left(0;4 - \frac{3}{2}\sqrt{7}\right) \cup \left(4 + \frac{3}{2}\sqrt{7};+\infty\right)$.

Thí dụ 70. Giải bất phương trình: $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x} \quad (*)$

Đề thi Đại học khối B năm 2012

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{3} \\ x \geq 2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$.

- Với $x = 0 \Rightarrow (*)$: $2 \geq 0 \Rightarrow x = 0$: là nghiệm bất phương trình.

- Với $x > 0$: chia hai vế của $(*)$ cho $\sqrt{x}$, ta được:

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x + \frac{1}{x} - 4} \geq 3 \quad (1)$

- Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2 \Rightarrow t^2 = x + \frac{1}{x} + 2 \quad (2)$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{t^2-6} \ge 3-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-t<0 \\ \begin{cases} 3-t \ge 0 \\ t^2-6 \ge (3-t)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow t \ge \frac{5}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \ge \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge 2 \ \vee\ \sqrt{x} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{4} \ \vee\ x \ge 4.$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[0;\frac{1}{4}\right] \cup \left[4;+\infty\right)$.

Thí dụ 71. Giải phương trình: $\left(x^2+1\right)^2 = 5 - x\sqrt{2x^2+4} \quad (*)$

Trích Đề thi thử Đại học lần 1 năm 2013 – THPT Minh Khai – Hà Tĩnh

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow x^4+2x^2+1 = 5-x\sqrt{2x^2+4} \Leftrightarrow x^2\left(x^2+2\right) = 4 - x\sqrt{2x^2+4} \qquad (1)$$

- Đặt $t = x\sqrt{2x^2+4} \Rightarrow t^2 = x^2\left(2x^2+4\right) \Rightarrow x^2\left(x^2+2\right) = \frac{t^2}{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{t^2}{2} = 4-t \Leftrightarrow t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow t=-4 \ \vee\ t=2.$$

- $t=-4 \Rightarrow x\sqrt{2x^2+4} = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x^4+2x^2-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$.

- $t=2 \Rightarrow x\sqrt{2x^2+4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^4+2x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x^2=\sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$.

- Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=-\sqrt{2} \ \vee\ x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$.

Thí dụ 72. Giải phương trình: $x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3x+1 \quad (*)$

Đề thi học sinh giỏi tỉnh Đồng Tháp năm 2011

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x \ne 0 \\ x-\frac{1}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ \frac{x^2-1}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-1;0\right) \cup \left[1;+\infty\right)$.

- Chia hai vế phương trình cho $x \ne 0$, ta được:

$$(*) \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3+\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}+2\sqrt{x-\frac{1}{x}}-3=0 \quad (1)$$

- Đặt $t = \sqrt{x - \frac{1}{x}},\ \left(t \ge 0\right) \Rightarrow t^2 = x - \frac{1}{x}$.

$\left(1\right) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & \left(N\right) \\ t = -3 & \left(L\right) \end{array}\right.$.

- Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Thí dụ 73. Giải phương trình: $\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 9}} - 1 = 0 \quad \left(1\right)$

Trích Đề thi thử Đại học lần 1 năm 2013 – Trường THPT Trần Phú – Hà Tĩnh

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ne 0$.

$\left(1\right) \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 9}{x^2} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 9}} - 3 = 0 \quad \left(2\right)$

- Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 9}} \ne 0 \Rightarrow t^2 = \frac{x^2}{2x^2 + 9} \Rightarrow \frac{1}{t^2} = \frac{2x^2 + 9}{x^2}$. Khi đó:

$\left(2\right) \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee\ t = -\frac{1}{2}$.

- Với $t = 1 \Rightarrow x = \sqrt{2x^2 + 9} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = 2x^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 9 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

- Với $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow -2x = \sqrt{2x^2 + 9} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 4x^2 = 2x^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

- Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 235. Giải phương trình: $2x^2 - 6x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 8} \quad \left(*\right)$

✍ **Nhận xét**: Để ý rằng biểu thức trong căn dạng: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = \left(x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 4\right)$ nên ta nghĩ đến việc tìm hai số $\alpha,\ \beta$ thỏa mãn đồng nhất

$2x^2 - 6x + 4 = \alpha\left(x + 2\right) + \beta\left(x^2 - 2x + 4\right) = \beta x^2 + \left(\alpha - 2\beta\right)x + \left(2\alpha + 4\beta\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha - 2\beta = -6 \\ 2\alpha + 4\beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -2 \end{cases}$. Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \geq -2$.

$(*) \Leftrightarrow 2\left(x^2 - 2x + 4\right) - 2\left(x + 2\right) - 3\sqrt{\left(x+2\right)\left(x^2 - 2x + 4\right)} = 0 \quad (1)$

Cách giải 1. Đặt một ẩn phụ

- Chia hai vế (1) cho $x^2 - 2x + 4 > 0$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2 - \frac{2\left(x+2\right)}{x^2 - 2x + 4} - 3.\sqrt{\frac{x+2}{x^2 - 2x + 4}} = 0 \quad (2)$$

- Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2 - 2x + 4}}$, $\left(t \geq 0\right)$ và $t^2 = \dfrac{x+2}{x^2 - 2x + 4}$, lúc đó:

$$(2) \Leftrightarrow 2 - 2t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\ (N) \ \vee\ t = -2\ (L).$$

- Với $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2 - 2x + 4}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}$.

- So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm $x = 3 - \sqrt{13} \ \vee\ x = 3 + \sqrt{13}$.

Cách giải 2. Đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình thuần nhất.

- Đặt $a = \sqrt{x+2} \geq 0,\ b = \sqrt{x^2 - 2x + 4} \geq \sqrt{3}$.

$(1) \Leftrightarrow 2b^2 - 2a^2 - 3ab = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 2\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 3\dfrac{a}{b} = 0$ (chia hai vế cho $b \geq \sqrt{3}$)

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = -2\ (L) \ \vee\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow b = 2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 4x + 8 \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{13} \ \vee\ x = 3 + \sqrt{13}$.

Thí dụ 74. Giải phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1} \quad (*)$

Đề nghị Olympic 30 – 4 năm 2007

Nhận xét: Để ý rằng: $x^3 - 1 = \left(x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$, một cách tự nhiên ta suy nghĩ đến việc phân tích $2x^2 + 5x - 1$ sao cho $2x^2 + 5x - 1 = \alpha\left(x - 1\right) + \beta\left(x^2 + x + 1\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 5 \\ \beta - \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 3 \\ 2 - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

. Nên ta có lời giải sau

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \geq 1$.

$$(*) \Leftrightarrow 3\left(x-1\right)+2\left(x^2+x+1\right)=7\sqrt{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)} \quad (1)$$

- Vì $x=1$ không là nghiệm của (1) nên chia hai vế cho $\left(x-1\right)>0$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 3+2.\frac{x^2+x+1}{x-1}=7\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}} \quad (2)$$

- Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}},\ \left(t\geq 0\right)$ và $t^2=\frac{x^2+x+1}{x-1}$ nên

$$(2) \Leftrightarrow 2t^2-7t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=3 \end{array}\right..$$

- Với $t=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2+4x+3=0:$ vô nghiệm.
- Với $t=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}}=3 \Leftrightarrow x^2-8x+10=0 \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{6}$.
- So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm là $x=4-\sqrt{6}\ \vee\ x=4+\sqrt{6}$.

✍ **<u>Cách giải 2</u>**. Đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình thuần nhất (Hs làm tương tự thí dụ trên).

<u>Thí dụ 75.</u> Giải phương trình: $3x^2-2x-2=\frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{x^3+3x^2+4x+2} \quad (*)$

✍ **<u>Nhận xét</u>**: Để ý rằng: $x^3+3x^2+4x+2=\left(x+1\right)\left(x^2+2x+2\right)$ một cách tự nhiên ta suy nghĩ đến việc phân tích $3x^2-2x-2$ sao cho

$$3x^2-2x-2=\alpha\left(x+1\right)+\beta\left(x^2+2x+2\right)=\beta x^2+\left(\alpha+2\beta\right)x+\left(\alpha+2\beta\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=3 \\ \alpha+2\beta=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=3 \\ \alpha=-8 \end{cases}.$$ Nên ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x\geq -1$.

$$(*) \Leftrightarrow -8\left(x+1\right)+3\left(x^2+x+2\right)=\frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2+x+2\right)} \quad (1)$$

- Do $x=-1$ không là nghiệm của (1) nên chia hai vế (1) cho $\left(x+1\right)>0$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow -8+3.\frac{x^2+x+2}{x+1}-\frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+1}} \quad (2)$$

- Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+1}},\ \left(t\geq 0\right)$ và $t^2=\frac{x^2+x+2}{x+1}$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 3t^2 - \frac{6}{\sqrt{30}}t - 8 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{30}.t^2 - 6t - 8\sqrt{30} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = \dfrac{\sqrt{30}}{3} & (N) \\ t = -\dfrac{4\sqrt{30}}{15} & (L) \end{array}\right.$$

- Với $t = \dfrac{\sqrt{30}}{3} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{x+1}} = \dfrac{\sqrt{30}}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} \\ x = 2 \end{array}\right.$.
- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Cách giải 2. Đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình thuần nhất (Hs làm tương tự thí dụ trên).

Thí dụ 76. Giải phương trình: $\sqrt{3}.x^2 - 3\sqrt{3}x + \sqrt{3} + \sqrt{x^4 + x^2 + 1} = 0 \quad (*)$

Nhận xét: Để ý rằng:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

và biểu thức ngoài dấu căn có nhân tử chung là $\sqrt{3}$ nên ta chia hai vế cho $\sqrt{3}$ được $x^2 - 3x + 1 = \alpha(x^2+x+1) + \beta(x^2-x+1)$ nhằm dễ tìm hai số α, β thỏa đồng nhất

$$x^2 - 3x + 1 = (\alpha+\beta)x^2 + (\alpha-\beta)x + (\alpha+\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha-\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}.$$

Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Tập xác định: $x \in \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 2(x^2-x+1) - (x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = 0 \quad (1)$$

- Chia hai vế cho $x^2 + x + 1 > 0$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2.\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}} = 0 \quad (2)$$

- Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$, $(t \ge 0)$ và $t^2 = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, lúc đó:

$$(2) \Leftrightarrow 2t^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}t - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}.t^2 + t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = \dfrac{\sqrt{3}}{3} & (N) \\ t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & (L) \end{array}\right.$$

- Với $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách giải 2. Đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình thuần nhất (Hs làm tương tự thí dụ trên).

Thí dụ 77. Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}\quad (*)$

Nhận xét: Chuyển vế sao cho hai vế không âm và bình phương hai vế, ta thu được phương trình: $2x^2-5x+2=5\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}$. Nên ta cố gắng đi tìm hai số $\alpha,\ \beta$ thỏa: $2x^2-5x+2=\alpha(x+1)+\beta(x^2-x-20),$ và không tồn tại hai số $\alpha,\ \beta$ thỏa đồng nhất.

Nhưng ta để ý rằng:

$$\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}=\sqrt{\left|(x+1)(x+4)(x-5)\right|}=\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)}$$

và lúc đó, tìm hai số $\alpha,\ \beta$ thỏa: $2x^2-5x+2=\alpha(x+4)+\beta(x^2-4x-5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta=2\\ \alpha-4\beta=-5\\ 4\alpha-5\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\beta=2\\ \alpha=3\end{cases}$$. Nên ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\Leftrightarrow x\ge 5$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+14x+9}=5\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x-20}$

$\Leftrightarrow 5x^2+14x+9=25(x+1)+(x^2-x-20)+10\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=5\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)}$

$\Leftrightarrow 2(x^2-4x-5)+3(x+4)=5\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)}\quad (1)$

- Với điều kiện $x\ge 5\Rightarrow x+4>0,$ nên chia hai vế (1) cho $(x+4)>0,$ ta được:

$(1)\Leftrightarrow 2.\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}+3=5.\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}}\quad (2)$

- Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}},\ (t\ge 0)$ và $t^2=\dfrac{x^2-4x-5}{x+4},$ lúc đó:

$(2)\Leftrightarrow 2t^2-5t+3=0\Leftrightarrow t=1\ \vee\ t=\dfrac{3}{2}.$

- Với $t=1\Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}}=1\Leftrightarrow x^2-5x-9=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5-\sqrt{61}}{2}\vee x=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}.$
- Với $t=\dfrac{3}{2}\Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 4x^2-25x-56=0\Leftrightarrow x=8\ \vee\ x=-\dfrac{7}{4}.$
- So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm: $x=8\ \vee\ x=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}.$

Cách giải 2. Đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình thuần nhất (Hs làm tương tự thí dụ trên).

2/ Đặt hai ẩn phụ

Thí dụ 78. Giải phương trình: $2\sqrt{3x+7}-5\sqrt[3]{x-6}=4 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x\ge -\dfrac{7}{3}$.
- Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{3x+7}\ge 0\\ v=\sqrt[3]{x-6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=3x+7\\ v^3=x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=3x+7\\ -3v^3=-3x+18\end{cases}\overset{\oplus}{\Leftrightarrow} u^2-3v^3=25 \quad (1)$

$(*)\Leftrightarrow 2u-5v=4 \quad (2)$

$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}u^2-3v^3=25\\ 2u-5v=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{4+5v}{2}\\ 12v^3-25v^2-40v+84=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=2\\ v=\dfrac{1\pm\sqrt{2017}}{2}\end{array}\right.$.

- Với $v=2\Rightarrow\sqrt[3]{x-6}=2\Leftrightarrow x-6=8\Leftrightarrow x=14$.
- Với $v=\dfrac{1+\sqrt{2017}}{2}\Rightarrow\sqrt[3]{x-6}=\dfrac{1+\sqrt{2017}}{2}\Leftrightarrow x=\left(\dfrac{1+\sqrt{2017}}{2}\right)^3+6$.
- Với $v=\dfrac{1-\sqrt{2017}}{2}\Rightarrow\sqrt[3]{x-6}=\dfrac{1-\sqrt{2017}}{2}\Leftrightarrow x=\left(\dfrac{1-\sqrt{2017}}{2}\right)^3+6$.
- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=14\ \vee\ x=\left(\dfrac{1+\sqrt{2017}}{2}\right)^3+6$.

Thí dụ 79. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0 \quad (1)$

Đề thi Đại học khối A năm 2009

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $6-5x\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{6}{5}$.
- Đặt $\begin{cases}u=\sqrt[3]{3x-2}\\ v=\sqrt{6-5x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^3=3x-2\\ v^2=-5x+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5u^3=15x-10\\ 3v^2=-15x+18\end{cases}\overset{\oplus}{\Leftrightarrow}5u^3+3v^2=8 \quad (2)$
- Lúc đó: $(1)\Leftrightarrow 2u+3v-8=0 \quad (3)$

$(2),(3)\Rightarrow\begin{cases}5u^3+3v^2=8\\ 2u+3v=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{2u-8}{3}\\ 15u^3+4u^2-32u+40=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-2\\ v=4\end{cases}$.

$\Rightarrow\begin{cases}u=\sqrt[3]{3x-2}=-2\\ v=\sqrt{6-5x}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2=-8\\ 6-5x=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ x=-2\end{cases}\Leftrightarrow x=-2$.

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = -2$.

Thí dụ 80. Giải phương trình: $\sqrt[4]{5 - x} + \sqrt[4]{x - 1} = \sqrt{2} \quad (1)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} 5 - x \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$.

- Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[4]{5 - x} \ge 0 \\ v = \sqrt[4]{x - 1} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^4 = 5 - x \\ v^4 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow u^4 + v^4 = 4 \quad (2)$

- Từ $(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} u + v = \sqrt{2} \\ u^4 + v^4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \sqrt{2} \\ \left[(u + v)^2 - 2uv\right]^2 - 2u^2v^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \sqrt{2} \\ (2 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \sqrt{2} \\ 2u^2v^2 - 8uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \sqrt{2} \\ uv = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u + v = \sqrt{2} \\ uv = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt{2} \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 0 \\ v = \sqrt{2} \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} u = \sqrt{2} \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{5 - x} = \sqrt{2} \\ \sqrt[4]{x - 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

- Với $\begin{cases} u = 0 \\ v = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{5 - x} = 0 \\ \sqrt[4]{x - 1} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$.

- Kết hợp với điều kiện, phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$.

Nhận xét: Qua các thí dụ trên, ta nhận thấy rằng, nếu phương trình có dạng

$\alpha.\sqrt[n]{a - f(x)} + \beta.\sqrt[m]{b + f(x)} = c \xrightarrow{PP} \begin{cases} u = \sqrt[n]{a - f(x)} \\ v = \sqrt[m]{b + f(x)} \end{cases}$ hay nói một cách dễ hiểu hơn là gặp những phương trình có chỉ số căn lệch bậc hoặc chỉ số căn cao, thì ta sẽ đặt hai ẩn phụ để đưa về hệ phương trình dạng: $\begin{cases} \alpha u + \beta v = c \\ u^n + v^n = a + b \end{cases}$ mà đã biết cách giải.

Thí dụ 81. Giải phương trình: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1} \quad (1)$

Đề 73/II$_2$ – Bộ đề tuyển sinh Đại học và Cao đẳng

Bài giải tham khảo

- Đặt $y = \sqrt[3]{2x - 1} \Rightarrow y^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x \quad (2)$

$$\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow\begin{cases}x^3+1=2y\\y^3+1=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+1=2y\\x^3-y^3=2\left(y-x\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+1=2y\\\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)+2\left(x-y\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+1=2y\\\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2+2\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^3+1=2y\\x=y\end{cases}\\\begin{cases}x^3+1=2y\\x^2+xy+y^2+2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^3-2x+1=0\\x=y\end{cases}\\\begin{cases}x^3+1=2y\\\left(x+\dfrac{y}{4}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}+2=0\ \left(VN\right)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

- Vậy phương trình có ba nghiệm: $x=1\ \vee\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ \vee\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét: Qua thí dụ trên, ta nhận thấy rằng, nếu phương trình có dạng $x^n+a=b\sqrt[n]{bx-a}\xrightarrow{PP}$ Đặt $y=\sqrt[n]{bx-a}$ và khi đó, ta có hệ đối xứng loại II dạng $\begin{cases}x^n-by+a=0\\y^n-bx+a=0\end{cases}$ mà đã biết cách giải (xem thêm phần hệ phương trình cơ bản ở phần sau).

Thí dụ 82. Giải phương trình: $3x^2+6x-3=\sqrt{\dfrac{x+7}{3}}\ \left(*\right)$

Đề thi học sinh giỏi Toán 10 huyện Hóc Môn – Tp. Hồ Chí Minh ngày 13/04/2013

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x\ge-7$.
- Đặt $y+1=\sqrt{\dfrac{x+7}{3}},\ \left(y\ge-1\right)\Rightarrow y^2+2y+1=\dfrac{x+7}{3}\Leftrightarrow3y^2+6y=x+4\quad\left(1\right)$

$\left(*\right)\Leftrightarrow3\left(x+1\right)^2-6=y+1\Leftrightarrow3x^2+6x=y+4\quad\left(2\right)$

- Từ $\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow\begin{cases}3y^2+6y=x+4\\3x^2+6x=y+4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\3\left(y+x\right)+7=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}y=x&\left(3\right)\\y=-\dfrac{7}{3}-x&\left(4\right)\end{array}\right.$

$\left(3\right)\Leftrightarrow x+1=\sqrt{\dfrac{x+7}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\3x^2+5x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-5+\sqrt{73}}{6}$.

$\left(4\right)\Leftrightarrow-\dfrac{4}{3}-x=\sqrt{\dfrac{x+7}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}-7\le x\le-\dfrac{4}{3}\\9x^2+21x-5=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-7-\sqrt{69}}{6}$.

- So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm: $x=\dfrac{-5+\sqrt{73}}{6}\ \vee\ x=\dfrac{-7-\sqrt{69}}{6}$.

Cách giải 2: Có thể giải bằng cách đặt hai ẩn phụ: $\begin{cases} u = x + 1,\ \left(u \ge -6\right) \\ 0 \le v = \sqrt{\dfrac{x+1}{3} + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u^2 - 6 = v \\ 3v^2 - 6 = u \end{cases}.$

Nhận xét: Dạng bài tổng quát của bài toán là $\sqrt{ax + b} = cx^2 + dx + e,$ ta có thể giải quyết bằng cách đặt điều kiện, bình phương hai vế và đồng nhất thức để tìm được nghiệm, nhưng đối với những bài toán không làm được cách đó thì sao ??? điển hình là thí dụ nêu trên.

Và trong lời giải, câu hỏi đặt ra là tại sao tôi biết cách đặt $y + 1 = \sqrt{\dfrac{x+7}{3}}$????

Với phương trình: $\sqrt{ax + b} = cx^2 + dx + e,$ ta xét tam thức bậc hai:

$f\left(x\right) = cx^2 + dx + e \Rightarrow f'\left(x\right) = 2cx + d$. Giải phương trình: $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{d}{2c}$. Từ đó, bằng phép đặt $\sqrt{ax + b} = y - \left(-\dfrac{d}{2c}\right)$ hoặc $\sqrt{ax + b} = 2cx + d$ (nếu $-\dfrac{d}{2c}$ là số hữu tỉ) ta sẽ thu được hệ phương trình đối xứng loại II (trừ một số trường hợp đặc biệt).

Đối với bài toán này, ta xét $f\left(x\right) = 3x^2 + 6x - 3 \Rightarrow f'\left(x\right) = 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và ta sẽ đặt $y - \left(-1\right) = \sqrt{\dfrac{x+7}{3}} \Leftrightarrow y + 1 = \sqrt{\dfrac{x+7}{3}}$ như đã trình bày trong lời giải.

Thí dụ 83. Giải phương trình: $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x + 5}\quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

Xét $f\left(x\right) = x^2 - 4x - 3 \Rightarrow f'\left(x\right) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ nên ta có lời giải sau:

- Điều kiện: $x \ge -5$.
- Đặt $y - 2 = \sqrt{x + 5} \Leftrightarrow \left(y - 2\right)^2 = x + 5 \quad \left(1\right)$

$\left(*\right) \Leftrightarrow \left(x - 2\right)^2 - 7 = y - 2 \Leftrightarrow \left(x - 2\right)^2 = y + 5 \quad \left(2\right)$

$\left(1\right),\left(2\right) \Rightarrow \begin{cases} \left(y - 2\right)^2 = x + 5 \\ \left(x - 2\right)^2 = y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x - y\right)\left(x + y - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = 3 - x \end{array}\right.$.

- Với $y = x \Rightarrow \sqrt{x + 5} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x + 5 = \left(x - 2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{5 + \sqrt{29}}{2}$.
- Với $y = 3 - x \Rightarrow \sqrt{x + 5} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \ge 0 \\ x + 5 = \left(1 - x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$.
- So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = -1 \ \vee\ x = \dfrac{5 + \sqrt{29}}{2}$.

Thí dụ 84. Giải phương trình: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}\quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

Xét $f\left(x\right)=2x^2-6x-1\Rightarrow f'\left(x\right)=4x^2-6=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ nên có lời giải sau:

- Điều kiện: $x\ge -\dfrac{5}{4}$.
- Đặt $2y-3=\sqrt{4x+5}\Rightarrow \left(2y-3\right)^2=4x+5\quad \left(1\right)$

$\left(*\right)\Leftrightarrow \left(2x-3\right)^2=2\sqrt{4x+5}+11\Leftrightarrow \left(2x-3\right)^2=2\left(2y-3\right)+11\Leftrightarrow \left(2x-3\right)^2=4y+5\ \left(2\right)$

$\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow \begin{cases}\left(2y-3\right)^2=4x+5\\ \left(2x-3\right)^2=4y+5\end{cases}\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x+y-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x\\ y=1-x\end{array}\right.$.

- Với $y=x\Rightarrow \sqrt{4x+5}=2x-3\Leftrightarrow \begin{cases}2x-3\ge 0\\ 4x+5=\left(2x-3\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}$.
- Với $y=1-x\Rightarrow \sqrt{4x+5}=-1-x\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -1\\ 4x+5=\left(-1-x\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{2}$.
- So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=1-\sqrt{2}\ \vee\ x=2+\sqrt{3}$.

Thí dụ 85. Giải phương trình: $2.\sqrt[4]{\left(1+x\right)^2}+3\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{\left(1-x\right)^2}=0\quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $1-x^2\ge 0\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.
- Đặt $\begin{cases}u=\sqrt[4]{1+x}\ge 0\\ v=\sqrt[4]{1-x}\ge 0\end{cases}$. Lúc đó: $\left(*\right)\Leftrightarrow 2u^2+3uv+v^2=0\quad \left(1\right)$
- Do $v=0:\left(1\right)\Leftrightarrow 2u^2=0\Leftrightarrow u=0\Leftrightarrow x=-1$ không là nghiệm của $\left(*\right)$ nên chia hai vế của $\left(1\right)$ cho $v^2\ne 0$ ta được: $\left(1\right)\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{u}{v}\right)^2+3\left(\dfrac{u}{v}\right)+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{u}{v}=-1\\ \dfrac{u}{v}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\ \left(L\right)$.
- Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Lưu ý: Ta có thể giải bằng cách, chia hai vế của $\left(*\right)$ cho $\sqrt[4]{\left(1-x\right)^2}\ne 0$ và thu được phương trình: $2\sqrt[4]{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}+3\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}}+1=0$, rồi đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}}\ge 0$ và cũng được phương trình $2t^2+3t+1=0$.

Nhận xét: Dạng bài tổng quát của bài toán là $a.\sqrt[n]{A^2}+b.\sqrt[n]{AB}+c.\sqrt[n]{B^2}=0\xrightarrow{PP}$ Đặt $\begin{cases}u=\sqrt[n]{A}\\ v=\sqrt[n]{B}\end{cases}$ và đưa về phương trình đẳng cấp mà đã biết cách giải.

Thí dụ 86. Giải phương trình: $4\sqrt[3]{(x+2)^2} - 7\sqrt[3]{(4-x)^2} + 3\sqrt[3]{(2-x)^2} = 0 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Đặt $u = \sqrt[3]{x+2},\ v = \sqrt[3]{2-x}$ và lúc đó $(*) \Leftrightarrow 4u^2 - 7uv + 3v^2 = 0 \quad (1)$
- Do $v = 0$ không là nghiệm của phương trình (1) nên chia hai vế (1) cho $v^2 \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow 4\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 7\left(\frac{u}{v}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v} = 1 \ \vee\ \frac{u}{v} = \frac{3}{4}.$$

- Với $\frac{u}{v} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x+2}{2-x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
- Với $\frac{u}{v} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x+2}{2-x}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2-x} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = -\frac{74}{91}$.
- Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0 \ \vee\ x = -\frac{74}{91}$.

Lưu ý: Ta có thể giải theo cách khác giống như thí dụ trên vẫn đi đến kết quả này.

Thí dụ 87. Giải phương trình: $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3 \quad (1)$

Đại học Y Hải Phòng – Hệ chuyên ban năm 2000

Bài giải tham khảo

- Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{2-x} \\ v = \sqrt[3]{7+x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 = 2-x \\ v^3 = 7+x \end{cases} \Rightarrow u^3 + v^3 = 9 \quad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3 \\ (u+v)(u^2 - uv + v^2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 3uv = 3 \\ u + v = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 - x \\ 8 = 7 + x \end{cases} \vee \begin{cases} 8 = 2 - x \\ 1 = 7 + x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

- Vậy phương trình có hai nghiệm : $x = -6 \ \vee\ x = 1$.

Thí dụ 88. Giải phương trình: $\sqrt{1 + \sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right] = 2 + \sqrt{1-x^2} \quad (*)$

Trích Đề thi thử Đại học năm 2013 lần 1 – THPT Hậu Lộc 2

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{1 + \sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\left[\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2\right] = 2 + \sqrt{1-x}\sqrt{1+x} \quad (1)$$

- Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{1+x} \ge 0 \\ v = \sqrt{1-x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 1+x \\ v^2 = 1-x \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = 2 \quad (2)$

- Từ $(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ \sqrt{1+uv}\left(u^3 - v^3\right) = 2 + uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(2+2uv\right)}\left(u^3 - v^3\right) = 2 + uv \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + 2uv\right)}.\left(u-v\right)\left(u^2 + v^2 + uv\right) = 2 + uv \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(u+v\right)^2}\left(u-v\right)\left(2+uv\right) - \left(2+uv\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ \left(2+uv\right)\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(u^2 - v^2\right) - 1\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ uv = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ u^2 - v^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ 2uv = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} 2u^2 = 2 + \sqrt{2} \\ u^2 - v^2 = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u+v\right)^2 = -2 \\ 2uv = -4 \end{cases} \left(VN\right) \vee \begin{cases} u^2 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v^2 = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - x = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Thí dụ 89.</u> Giải phương trình: $\left(x+3\right)\sqrt{-x^2 - 8x + 48} = x - 24$

Olympic 30 – 04 lần XIX (06/04/2013) – Khối 10 (THPT chuyên Lê Hồng Phong)

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{-x^2 - 8x + 48} \ge 0 \\ v = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = -x^2 - 8x + 48 \\ v^2 = x^2 + 6x + 9 \end{cases}$.

- Ta có: $\begin{cases} u^2 + v^2 = -2x + 57 \\ 2uv = 2x - 48 \end{cases} \Leftrightarrow \left(u+v\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u + v = 3 \\ u + v = -3 \end{array}\right.$.

- Trường hợp 1. $u + v = 3 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 - 8x + 48} + x + 3 = 3 \Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{7}$.

- Trường hợp 2. $u + v = -3 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 - 8x + 48} + x + 3 = -3 \Leftrightarrow x = -5 - \sqrt{31}$.

Thí dụ 90. Giải phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2\quad(*)$

Đề thi thử Đại học lần 1 khối A, B năm 2011 – Báo Tuổi Trẻ

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases}x\neq 0\\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases}$.

- Đặt $y=\sqrt{2-x^2},\ (y>0)\Rightarrow y^2=2-x^2\Leftrightarrow x^2+y^2=2\quad(1)$

$(*)\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2\Leftrightarrow x+y=2xy\quad(2)$

- Từ $(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}x+y=2xy\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2xy\\ (x+y)^2-2xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2xy\\ (2xy)^2-(2xy)-2=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2xy\\ 2(xy)^2-(xy)-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2xy\\ xy=1\ \vee\ xy=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=1\\ x+y=2\end{cases}\\ \begin{cases}xy=-\dfrac{1}{2}\\ x+y=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}.$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm phương trình là: $x=1\ \vee\ x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Đặt một ẩn phụ

Bài tập 236. Giải phương trình: $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$.

Đề thi thử Đại học 2013 lần 1 khối D – THPT Ngô Gia Tự – Bắc Ninh

ĐS: $x=0\ \vee\ x=2\ \vee\ x=\dfrac{-2-\sqrt{14}}{3}$.

Bài tập 237. Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+1}=1$.

Đại học Xây Dựng Hà Nội khối A năm 1998

ĐS: $x=-1\ \vee\ x=0\ \vee\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 238. Giải phương trình: $x^4+\sqrt{x^2+3}=3$.

ĐS: $x=\pm1$.

Bài tập 239. Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$.

ĐS: $x=1 \vee x=2-\sqrt{2}$.

Bài tập 240. Giải phương trình: $2x^2-7x-10\sqrt{3x+1}+25=0$.

ĐS: $x=1 \vee x=5$.

Bài tập 241. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$.

Đại học Nông Nghiệp I khối A năm 1999

ĐS: $x=1$.

Bài tập 242. Giải phương trình: $\left(x^2+2\right)^2+4\left(x+1\right)^3+\sqrt{x^2+2x+5}=\left(2x-1\right)^2+2$.

HD: $\left(x^2+2x\right)^2+8\left(x^2+2x\right)+\sqrt{x^2+2x+5}+5=0 \Rightarrow x=-1$.

Bài tập 243. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+x+6}=4x-2+7\sqrt{x+1}, \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Đề thi thử Đại học lần 2 khối D năm 2013 – THPT Chuyên Quốc Học Huế

HD: PT $\Leftrightarrow \sqrt{\left(2x-1\right)^2+5\left(x+1\right)}=2\left(2x-1\right)+7\sqrt{x+1} \Rightarrow x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{2}$.

Bài tập 244. Giải phương trình: $2x^2+3x-14=2\sqrt[3]{2x^2+3x-10}$.

ĐS: $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{17}}{4}$.

Bài tập 245. Giải phương trình: $6x^2+2x+\sqrt[3]{3x^2+x+4}-18=0$.

ĐS: $x=-\dfrac{4}{3} \vee x=1$.

Bài tập 246. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{x^2+5x-2}=x\left(x+5\right)+2$.

ĐS: $x=-3 \vee x=-2$.

Bài tập 247. Giải phương trình: $3x^2-12x-5\sqrt{10+4x-x^2}+12=0$.

ĐS: $x=2\pm\sqrt{5}$.

Bài tập 248. Giải phương trình: $\left(x+4\right)\left(x+1\right)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

Đại học Ngoại Ngữ năm 1998

ĐS: $x=2 \vee x=-7$.

Bài tập 249. Giải phương trình: $2\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{10-x}\right)-\sqrt{30+7x-x^2}=4$.

ĐS: $x=1 \vee x=6$.

Bài tập 250. Giải phương trình: $3\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{6-x}\right)-2\sqrt{-x^2-x+42}-3=0$.

ĐS: $x=-3 \vee x=2$.

Bài tập 251. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}=3x+6\sqrt{-2x^2+5x+12}-23$.

ĐS: $x=\dfrac{11}{9}\ \vee\ x=3$.

Bài tập 252. Giải phương trình: $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$.

Đại học Ngoại Thương cơ sở II khối A năm 2000

ĐS: $x=1\ \vee\ x=-4$.

Bài tập 253. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=4x-15+\sqrt{x^2-4}$.

ĐS: $x=\dfrac{97}{36}$.

Bài tập 254. Giải phương trình: $\sqrt{3-x+x^2}-\sqrt{2+x-x^2}=1$.

Đại học Ngoại Thương Hà Nội năm 1999 – 2000

HD: $t=x^2-x\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 255. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$.

Đại học Thương Mại năm 1998 – 1999

ĐS: $x=1\ \vee\ x=2$.

Bài tập 256. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+19}$.

Đại học Dân lập Tôn Đức Thắng năm 1998 – 1999

ĐS: $x=-2\ \vee\ x=1$.

Bài tập 257. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+2}-2\sqrt{2x^2+5x-6}=1$.

Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh khối D – E năm 2000

ĐS: $x=1\ \vee\ x=-\dfrac{7}{2}$.

Bài tập 258. Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+2x-1}-\sqrt{9-5x^2-2x}=\sqrt{10x^2+4x-12}$.

HD: $t=5x^2+2x-1\Rightarrow x=-\dfrac{7}{5}\ \vee\ x=1\ \vee\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{5}$.

Bài tập 259. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+12x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=8\sqrt{x}$.

HD: Do $x>0\Rightarrow$ chia hai vế cho $\sqrt{x}>0\Rightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{26}}{2}$.

Bài tập 260. Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=2x$.

ĐS: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ \vee\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Bài tập 261. Giải phương trình: $\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{16x}}=\dfrac{5}{2}$.

ĐS: $x=2 \vee x=-\dfrac{1}{511}$.

Bài tập 262. Giải bất phương trình: $\sqrt{6x^2-12x+7}+2x\geq x^2$.

ĐS: $x\in\left[1-\sqrt{8};1+\sqrt{8}\right]$.

Bài tập 263. Giải bất phương trình: $x\left(x+1\right)-\sqrt{x^2+x+4}+2\geq 0$.

Đại học Cần Thơ khối D năm 2001

ĐS: $x\in\mathbb{R}$.

Bài tập 264. Giải bất phương trình: $\sqrt{3x^2+6x+4}<2-2x-x^2$.

Đại học Giao Thông Vận Tải năm 1998

ĐS: $x\in\left(-2;0\right)$.

Bài tập 265. Giải bất phương trình: $2x^2+\sqrt{x^2-5x-6}>10x+15$.

Đại học Y Hà Nội năm 2001

ĐS: $x\in\left(-\infty;\dfrac{5-3\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

Bài tập 266. Giải bất phương trình: $5\sqrt{3x^2-4x-2}-6x^2+8x+7\geq 0$.

ĐS: $x\in\left[\dfrac{2-\sqrt{37}}{3};\dfrac{2-\sqrt{10}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2+\sqrt{10}}{3};\dfrac{2+\sqrt{37}}{3}\right]$.

Bài tập 267. Giải bất phương trình: $x^2+\sqrt{2x^2+4x+3}\geq 6-2x$.

Dự bị Đại học khối D năm 2004

ĐS: $x\in\left(-\infty;-3\right]\cup\left[1;+\infty\right)$.

Bài tập 268. Giải bất phương trình: $2.\sqrt{\dfrac{3x-1}{x}}\geq\dfrac{x}{3x-1}+1$.

ĐS: $x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Bài tập 269. Giải bất phương trình: $2.\sqrt{\dfrac{6x-1}{x}}<\dfrac{2x}{6x-1}+1$.

Bài tập 270. Giải bất phương trình: $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x}}+1+\sqrt{\dfrac{x}{2x-1}}>\dfrac{3x}{2x-1}$.

Bài tập 271. Giải bất phương trình: $2.\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\le\dfrac{2\left(x-1\right)}{x}+3$.

Bài tập 272. Giải bất phương trình: $3.\sqrt{\dfrac{2x}{x-1}}+4.\sqrt{\dfrac{x-1}{2x}}\ge\dfrac{3x-3}{2x}+10$.

Bài tập 273. Giải bất phương trình: $\sqrt{\dfrac{x}{3-2x}}+5.\sqrt{\dfrac{3-2x}{x}}>\dfrac{12-8x}{x}+5$.

Bài tập 274. Giải bất phương trình: $\dfrac{x-1}{x}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\ge 3$.

Đại học Mở Hà Nội khối A, B, R, V và D_4 năm 1999

ĐS: $x\in\left(-\dfrac{1}{12};0\right)$.

Bài tập 275. Giải bất phương trình: $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Đại học Thăng Long khối A năm 2001

ĐS: $x\in\left[-1;0\right)\cup\left(1;2\right]$.

Bài tập 276. Giải phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$.

Toán Học Tuổi Trẻ – Tháng 9 năm 2007

HD: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1$ nên đặt $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow t+\dfrac{1}{t}=2\Rightarrow x=1$.

Bài tập 277. Giải phương trình: $x=\left(2004+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

Toán Học Tuổi Trẻ – Tháng 3 năm 2005

HD: $x=0\longleftarrow$ Đặt $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$.

Bài tập 278. Giải bất phương trình: $\dfrac{x}{x-1}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}>3$.

ĐS: $x\in\left(-\dfrac{4}{3};-1\right)$.

Bài tập 279. Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

Đại học Ngoại Thương năm 1996

ĐS: $t=x+\dfrac{1}{x},\ \left|t\right|\ge 2\Rightarrow x=1$.

Bài tập 280. Giải phương trình: $\sqrt{5+2x}+\sqrt{5-2x}+5=3\sqrt{25-4x^2}$.

ĐS: $x=\pm 2$.

Bài tập 281. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{-x^2+3x+4}=5$.

Đại học Ngoại Ngữ năm 2001

ĐS: $x=0 \vee x=3$.

Bài tập 282. Giải phương trình: $2x+\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x}=1$.

ĐS: $x=0$.

Bài tập 283. Giải phương trình: $3\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}-2x+11\right)=4\sqrt{2x^2+x}$.

HD: $t=\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}\Rightarrow x=4$.

Bài tập 284. Giải phương trình: $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$, $\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Đại học khối B năm 2011

ĐS: $x=\dfrac{6}{5}$. Giải theo hai cách: đặt một ẩn phụ và đặt hai ẩn phụ.

Bài tập 285. Giải phương trình: $x^2-2x+4\left(x-3\right)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=0$.

HD: $t=\left(x-3\right)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}\Rightarrow x=1-\sqrt{5} \vee x=1-\sqrt{13}$.

Bài tập 286. Giải phương trình: $x^2+2x+\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+3}=9$.

ĐS: $x=1$.

Bài tập 287. Giải phương trình: $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$.

Đại học Mỏ – Địa Chất năm 2001

ĐS: $x=0 \vee x=2 \vee x=\dfrac{-6-\sqrt{126}}{2}$.

Bài tập 288. Giải phương trình: $729x^4+8\sqrt{1-x^2}=36$.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 228

ĐS: $x=\pm\dfrac{1}{9}\sqrt{-2+2\sqrt{82}}$.

Bài tập 289. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x\left(x^2-x+1\right)}\le\sqrt{\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{x}}$.

Đề thi chuyên Toán – Tin Đại học Quốc Gia Hà Nội năm 1988

ĐS: $x>0$.

Bài tập 290. Giải phương trình: $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=2\sqrt{1-x^2}=4$.

ĐS: $x=0$.

Bài tập 291. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

Dự bị 1 Đại học khối B năm 2006 – Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự năm 1999 – 2000

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 292. Giải phương trình: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-4} - 2x + 2$.

Cao đẳng sư phạm Bà Rịa – Vũng Tàu khối A năm 2001

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 293. Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$.

ĐS: $x = 2 \vee x = 2 - 2\sqrt{3}$.

Bài tập 294. Giải phương trình: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3 + \sqrt{(3+x)(6-x)}$.

ĐS: $x = 0 \vee x = -3$.

Bài tập 295. Giải phương trình: $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối A năm 2000 – Học Viện Ngân Hàng năm 2000

ĐS: $x = 0 \vee x = 1$.

Bài tập 296. Giải phương trình: $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$.

Cuộc thi HSG giỏi qua mạng Internet khối 10 năm 2009

Bài tập 297. Giải bất phương trình: $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 3 \le 3\sqrt{-x^2+x+6}$.

ĐS: $x \in [-2;-1] \cup [2;3]$.

Bài tập 298. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} \le x + \sqrt{x^2-16} - 6$.

Đề thi thử Đại học đề số 09 năm 2010 – Tạp chí toán học và Tuổi trẻ

ĐS: $x \in \left[\frac{145}{36}; +\infty\right)$.

Bài tập 299. Giải bất phương trình: $5\sqrt{x} + \dfrac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \dfrac{1}{2x} + 4$.

Trung Tâm Đào Tạo và Bồi Dưỡng Cán Bộ Y Tế năm 1993

ĐS: $x \in \left(0; \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}; +\infty\right)$.

Bài tập 300. Giải bất phương trình: $(x+1)(x-3)\sqrt{-x^2+2x+3} < 2 - (x-1)^2$.

ĐS: $x \in \left(1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\right)$.

Bài tập 301. Giải phương trình: $1 + \sqrt{1-x^2} = 2x^2$.

HD: Chia hai vế cho $x \ne 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 302. Giải phương trình: $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$.

HD: Chia hai vế cho $x\neq 0\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 303. Giải phương trình: $4\sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}-7.\sqrt[3]{4-x^2}+3.\sqrt[3]{\left(2-x\right)^2}=0$.

HD: Chia hai vế cho $\sqrt[3]{\left(2-x\right)^2}\neq 0\Rightarrow x=0\ \vee\ x=-\dfrac{74}{91}$.

Bài tập 304. Giải phương trình: $2\sqrt[4]{\left(1+x\right)^2}+3\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{\left(1-x\right)^2}=0$.

ĐS: Phương trình vô nghiệm.

Bài tập 305. Giải phương trình: $\sqrt[3]{\left(3x+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(3x-1\right)^2}+\sqrt[3]{9x^2-1}=1$.

ĐS: $x=0$.

Bài tập 306. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2+x-1}=2\left(\dfrac{7}{2}-x\right)-3x^2+x$.

HSG cấp trường Lớp 10 – THPT Lục Ngạn số 4 – Bắc Giang năm 2009 – 1010

Bài tập 307. Giải bất phương trình: $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}$.

HD: Bình phương và đặt $t=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow x\in\left(1;\dfrac{5}{4}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$.

Bài tập 308. Giải bất phương trình: $\dfrac{1}{1-x^2}+1>\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Dự bị Đại học khối A năm 2008

ĐS: $x\in\left(-1;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};1\right)$.

Bài tập 309. Giải phương trình: $x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}$.

ĐS: $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vee x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Bài tập 310. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

ĐS: $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \vee\ x=\dfrac{\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$.

Bài tập 311. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2\left(x-1\right)^4\left(2x^2-4x+1\right)$.

Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2001

ĐS: $x=0\ \vee\ x=2$.

Bài tập 312. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+4x+3}=\sqrt{\left(x+2\right)^3}$.

Đề thi thử Đại học lần 2 – THPT Chuyên Đại học Sư Phạm Hà Nội năm 2012

HD: $t=x+2\Rightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$.

Bài tập 313. Giải phương trình: $x^2-\left(x+2\right)\sqrt{x-1}=x-2$.

Đề thi thử Đại học năm 2010 – Trường THPT Tống Văn Trân – Nam Định

HD: $y=\sqrt{x-1}\Rightarrow x=2$.

Bài tập 314. Giải phương trình: $2\left(x^2+18\right)=7\sqrt{x^3+27}$.

ĐS: $x=\dfrac{7\pm\sqrt{61}}{2}\ \vee\ x=\dfrac{21\pm\sqrt{3\sqrt{33}}}{8}$. Giải bằng hai cách: 1 ẩn phụ và 2 ẩn phụ.

Bài tập 315. Giải phương trình: $5\sqrt{x^3+1}=2x^2+4$.

ĐS: $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$. Giải bằng hai cách: 1 ẩn phụ và 2 ẩn phụ.

Bài tập 316. Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+8}=3x^2-3x+18$.

ĐS: $x=\dfrac{11\pm\sqrt{177}}{2}$. Giải bằng hai cách: 1 ẩn phụ và 2 ẩn phụ.

Bài tập 317. Giải phương trình: $2\left(x^2-x+6\right)=5\sqrt{x^3+8}$.

Đề thi thử Đại học khối D năm 2013 – THPT Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An

ĐS: $x=3\pm\sqrt{13}$. Giải bằng hai cách: 1 ẩn phụ và 2 ẩn phụ.

Bài tập 318. Giải phương trình: $2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8}$.

ĐS: $x=3\pm\sqrt{13}$. Giải bằng hai cách: 1 ẩn phụ và 2 ẩn phụ.

Bài tập 319. Giải phương trình: $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$.

ĐS: $x=4+\sqrt{14}$. Giải bằng hai cách: 1 ẩn phụ và 2 ẩn phụ

Bài tập 320. Giải phương trình: $\sqrt{x^3-1}=x^2+3x-1$.

ĐS: Vô nghiệm. Giải bằng hai cách: 1 ẩn phụ và 2 ẩn phụ.

Bài tập 321. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0$.

Đề nghị Olympic 30 – 4 năm 2009

ĐS: $x=\dfrac{23\pm\sqrt{341}}{2}$.

Bài tập 322. Giải phương trình: $2x^2-5x+2=4\sqrt{2\left(x^3-21x-20\right)}$.

ĐS: $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{193}}{4} \vee x = \dfrac{17 \pm 3\sqrt{73}}{4}$.

Bài tập 323. Giải phương trình: $4x^2 - 2\sqrt{2}.x + 4 = \sqrt{x^4 + 1}$.

ĐS: Phương trình vô nghiệm.

Bài tập 324. Giải phương trình: $10\sqrt{x^3 + 1} = 3\left(x^2 + 2\right)$.

ĐS: $x = 5 \pm \sqrt{33}$. Giải bằng hai cách: 1 ẩn phụ và 2 ẩn phụ.

Bài tập 325. Giải phương trình: $2\sqrt{x^2 + 4x - 5} + \sqrt{x - 3} - \sqrt{11x^2 + 25x + 2} = 0$.

Bài tập 326. Giải phương trình: $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2\left(x^2 - x\right)} = 0$.

HSG Tỉnh Đắk Lắk – lớp 12 – ngày 10/11/2011

ĐS: $x = \pm 1 \vee x = 0 \vee x = 2$.

Đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp hoặc hệ

Bài tập 327. Giải phương trình: $\sqrt[4]{56 - x} + \sqrt[4]{x + 41} = 5$.

Học Viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông năm 1996

ĐS: $x = 40 \vee x = -25$.

Bài tập 328. Giải phương trình: $\sqrt[4]{47 - 2x} + \sqrt[4]{35 + 2x} = 4$.

ĐS: $x = -17 \vee x = 23$.

Bài tập 329. Giải phương trình: $\sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[3]{1 + x} = 2$.

ĐS: $x = 0$.

Bài tập 330. Giải phương trình: $\sqrt[4]{x + 8} - \sqrt[4]{x - 8} = 2$.

ĐS: $x = 8$.

Bài tập 331. Giải phương trình: $\sqrt[4]{18 + 5x} + \sqrt[4]{64 - 5x} = 4$.

ĐS: $x = -\dfrac{17}{5} \vee x = \dfrac{63}{5}$.

Bài tập 332. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x + 5} - \sqrt[3]{x - 2} = 1$.

ĐS: $x = 3$.

Bài tập 333. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3 + x} + \sqrt[3]{11 - x} = 2$.

ĐS: $x = 4 \pm 5\sqrt{2}$.

Bài tập 334. Giải phương trình: $\sqrt[4]{5 - x} + \sqrt[4]{12 + x} = 3$.

ĐS: $x = -11 \vee x = 4$.

Bài tập 335. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$.

Đại học Tài Chính Kế Toán Hà Nội năm 2000

ĐS: $x = 1 \vee x = 2 \vee x = 10$.

Bài tập 336. Giải phương trình: $\sqrt{5-4x} + \sqrt[3]{x+7} = 3$.

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 337. Giải phương trình: $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$.

ĐS: $x = -88 \vee x = -24 \vee x = 3$.

Bài tập 338. Giải phương trình: $\sqrt{3-2x} + \sqrt[3]{5+3x} = 3$.

ĐS: $x = -23 \vee x = -\dfrac{13}{8} \vee x = 1$.

Bài tập 339. Giải phương trình: $x^2 - 6x - 2 = \sqrt{x+8}$.

ĐS: $x = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \vee x = \dfrac{5-\sqrt{41}}{2}$.

Bài tập 340. Giải phương trình: $x^2 - 2x - 3 = \sqrt{x+3}$.

ĐS: $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

Bài tập 341. Giải phương trình: $x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$.

ĐS: $x = 2 + \sqrt{2}$.

Bài tập 342. Giải phương trình: $4x^2 + 4x - 3 = \sqrt{2x+5}$.

ĐS: $x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \vee x = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{4}$.

Bài tập 343. Giải phương trình: $9x^2 - 6x - 5 = \sqrt{3x+5}$.

ĐS: $x = \dfrac{4}{3} \vee x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{6}$.

Bài tập 344. Giải phương trình: $x^2 + 1 = 3\sqrt{3x-1}$.

ĐS: $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 345. Giải phương trình: $x^2 - 2 = 5\sqrt{2x-1}$.

ĐS: $x = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$.

Bài tập 346. Giải phương trình: $2x^2 + 4x = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$.

ĐS: $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \vee x = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}$.

Bài tập 347. Giải phương trình: $\sqrt{x+6} = x^2 + 4x$.

ĐS: $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \vee x = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

Bài tập 348. Giải phương trình: $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$.

ĐS: $x = -2 \vee x = 1$.

Bài tập 349. Giải phương trình: $x^2 - x = 2004\left(\sqrt{1+16032x}+1\right)$.

Đề thi học sinh giỏi tỉnh Bắc Giang năm 2003 – 2004

ĐS: $x = 4009$.

Bài tập 350. Giải phương trình: $x^2 - x - 1000\sqrt{1+8000x} = 1000$.

ĐS: $x = 2000$.

Bài tập 351. Giải phương trình: $18x^2 + 6x - 29 = \sqrt{12x+61}$.

ĐS: $x = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \vee x = \dfrac{-1-\sqrt{14}}{3}$.

Bài tập 352. Giải phương trình: $9x^2 + 12x - 2 = \sqrt{3x+8}$.

ĐS: $x = \dfrac{1}{3} \vee x = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{6}$.

Bài tập 353. Giải phương trình: $x + \sqrt{9-x^2} = 3 + 5x\sqrt{9-x^2}$.

ĐS: $x = 0 \vee x = 3 \vee x = \dfrac{-13-\sqrt{281}}{10}$.

Bài tập 354. Giải phương trình: $x + \sqrt{5-x^2} = 5x\sqrt{5-x^2} - 7$.

ĐS: $x = 1 \vee x = 2$.

Bài tập 355. Giải phương trình: $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x + \sqrt[3]{35-x^3}\right) = 30$.

ĐS: $x = 2 \vee x = 3$.

Bài tập 356. Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x+11} = 11$.

ĐS: $x = \dfrac{1-3\sqrt{5}}{2} \vee x = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$.

Bài tập 357. Giải phương trình: $7x^2 + 7x = \sqrt{\dfrac{4x+9}{28}},\ \left(x>0\right)$.

Đại học Anh Ninh năm 2000

ĐS: $x = \dfrac{-3+\sqrt{50}}{7}$.

Bài tập 358. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-9} = x^2 - 6x + 15$.

HD: $u = \sqrt[3]{x-9},\ v = x - 3 \Rightarrow x = 1$.

Bài tập 359. Giải phương trình: $\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}-1-x}+\sqrt[4]{x}\right)=1$.

HD: $u=\sqrt{\sqrt{2}-1-x},\ v=\sqrt[4]{x}\Rightarrow x=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{2.\sqrt[4]{8}-3}}{3}\right)^4$.

Bài tập 360. Giải phương trình: $9+\sqrt{9+\sqrt{x}}=x$.

HD: $y=9+\sqrt{x}\Rightarrow x=\dfrac{19+\sqrt{37}}{2}$.

Bài tập 361. Giải phương trình: $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$.

HD: $u=\sqrt{x-1}\geq 0,\ v=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}\geq\sqrt{5}\Rightarrow x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$.

Bài tập 362. Giải phương trình: $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\dfrac{4}{3}x-2$.

HD: $\sqrt[3]{81x-8}=3y-2\Rightarrow x=0\ \vee\ x=\dfrac{3\pm2\sqrt{6}}{3}$.

Bài tập 363. Giải phương trình: $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$.

Đề nghị Olympic 30 – 04 – 2009

ĐS: $x=1\ \vee\ x=-2$.

Bài tập 364. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^2-6$.

HD: $\sqrt[3]{x-9}=y-3\Rightarrow x=1$.

Bài tập 365. Giải phương trình: $8x^3-13x^2+7x=2\sqrt[3]{x^2+3x-3}$.

HD: $u=2x-1,\ v=\sqrt[3]{x^2+3x-3}\Rightarrow x=1\ \vee\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{89}}{16}$.

Bài tập 366. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-5}=(2x-3)^3-x+2$.

HD: $\sqrt[3]{3x-5}=2y-3\Rightarrow x=2\ \vee\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}$.

Bài tập 367. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-2}=8x^3-60x^2+151x-128$.

HD: $2y-5=\sqrt[3]{x-2}\Rightarrow x=3$.

Bài tập 368. Giải phương trình: $8x^3+8x-4=\sqrt[3]{4-6x}$.

HD: $2y=\sqrt[3]{4-6x}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}{2}$.

Bài tập 369. Giải phương trình: $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$.

Đề nghị Olympic 30 – 04 – 2006

HD: $2y = \sqrt[3]{6x+1} \Rightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \cos\frac{\pi}{9} \vee x = \cos\frac{5\pi}{9} \vee x = \cos\frac{7\pi}{9}$.

Bài tập 370. Giải phương trình: $x^3 + 3 = 4\sqrt[3]{4x-3}$.

HD: $x = 1 \vee x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Bài tập 371. Giải phương trình: $x = \left(2004+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

HD: Đặt $y = 1 - \sqrt{x}$.

Bài tập 372. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2+12x+6} - \sqrt{2x+1} > x + 2$.

HD: $u = \sqrt{2x-1} \ge 0,\ v = x + 2 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \left\{1;5\right\}$.

Bài tập 373. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1} + x - 3 \ge \sqrt{\left(x-3\right)^2 + 2x - 2}$.

HD: $u = \sqrt{x-1} \ge 0,\ v = x - 3 \Rightarrow x \in \left[3;+\infty\right)$.

Bài tập 374. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}$.

HD: $\text{PT} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2+2x\right)\left(2x-1\right)} = \left(x^2+2x\right) - \left(2x-1\right),\ u = x^2+2x,\ v = 2x-1$.

Bài tập 375. Giải phương trình: $x^2 + 3\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^4-x^2+1}$.

HD: $u = x^2 \ge 0,\ v = \sqrt{x^2-1} \ge 0$.

Bài tập 376. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12\left(x-1\right)}$.

HD: $u = \sqrt[3]{x},\ v = \sqrt[3]{2x-3}$.

Bài tập 377. Giải phương trình: $2x^2 - 6x + 10 - 5\left(x-2\right)\sqrt{x+1} = 0$.

Đề thi thử Đại học lần 1 năm 2013 – THPT Lê Hữu Trác 1

ĐS: $x = 3 \vee x = 8$.

Bài tập 378. Giải phương trình: $4x = \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}$.

Đề nghị Olympic 30 – 04 năm 2010

HD: Đặt $y = \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30+y}} \\ 4y = \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30+x}} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1921}}{32}$.

D – GIẢI PHƯƠNG TRÌNH & BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG BẤT ĐẲNG THỨC VÀ HÌNH HỌC



I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Giải phương trình và bất phương trình bằng bất đẳng thức

Để giải được phương trình hay bất phương trình bằng bất đẳng thức ta dựa vào hai ý tưởng sau:

— Biến đổi phương trình về dạng $f(x) = g(x)$ mà trong đó:

+ $\begin{cases} f(x) \le a \\ g(x) \ge a \end{cases}$ hay $\begin{cases} f(x) \ge a \\ g(x) \le a \end{cases}$ với a là hằng số.

+ Lúc đó, nghiệm của phương trình là tất cả các giá trị x thỏa mãn hệ $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$.

— Biến đổi phương trình về dạng $f(x) = a$ với a là hằng số mà trong đó:

+ Ta dùng bất đẳng thức hoặc đánh giá được kết quả: $f(x) \ge a$ hay $f(x) \le a$.

+ Lúc đó, nghiệm phương trình là tất cả các giá trị x thỏa mãn dấu của đẳng thức xảy ra.

Các bất đẳng thức quen thuộc:

— Bất đẳng thức Cauchy $\left(\underline{A}\text{rithmetic } \underline{M}\text{eans} - \underline{G}\text{eometric } \underline{M}\text{eans}\right)$:

+ Với $x,\ y \ge 0$ thì $\begin{cases} x + y \ge 2\sqrt{xy} & (1) \\ x^2 + y^2 \ge 2xy & (2) \end{cases}$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x = y$.

+ Với $x,\ y \in \mathbb{R}$ thì $\begin{cases} xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 & (3) \\ (x+y)^2 \ge 4xy & (4) \end{cases}$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x = y$.

+ Với $x,\ y,\ z \ge 0$ thì $\begin{cases} x + y + z \ge 3.\sqrt[3]{xyz} & (5) \\ xyz \le \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 & (6) \end{cases}$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x = y = z$.

+ Mở rộng cho n số $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ không âm ta có: $a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n.\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$.

— Bất đẳng thức Bunhiacôpxki (B.C.S).

+ Với $x,\ y$ bất kỳ, ta luôn có: $\begin{cases} (a.x + b.y)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) & (7) \\ |a.x + b.y| \le \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} & (8) \end{cases}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ hay $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.

+ Với x, y, z bất kỳ: $\begin{cases} \left(a.x+b.y+c.z\right)^2 \le \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) & (9) \\ \left|a.x+b.y+c.z\right| \le \sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)} & (10) \end{cases}$.

Dấu " = " xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ hay $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

— Bất đẳng thức cộng mẫu số (BĐT **Cauchy Schwarz**) là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức BCS.

+ Với $a,b\in\mathbb{R}$ và $x,y>0$, ta luôn có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{x+y}\quad(11)$.

+ Với $a,b,c\in\mathbb{R}$ và $x,y,z>0$, ta luôn có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{x+y+z}\quad(12)$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

— Bất đẳng thức về trị tuyệt đối

Điều kiện	***Nội dung***
$x\in\mathbb{R}$	$\left|x\right|\ge 0,\ \left|x\right|\ge x,\ \left|x\right|\ge -x$
$x>0$	$\left|x\right|\le a\Leftrightarrow -a\le x\le a$
	$\left|x\right|\ge a\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -a \\ x\ge a \end{array}\right.$
$a,b\in\mathbb{R}$	$\left|\left|a\right|-\left|b\right|\right|\le\left|a+b\right|\ge\left|a\right|+\left|b\right|$

2/ <u>Giải phương trình và bất phương trình bằng cách ứng dụng của hình học</u>

— Bất đẳng thức tam giác

Cho ΔABC có độ dài các cạnh BC, AC, AB tương ứng là a,b,c. Ta luôn có:

+ $\left|b-c\right|<a<b+c$ hay $\left|AC-AB\right|<BC<AC+AB$.

+ $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$.

Như vậy, ta chọn A,B,C có tọa độ thích hợp, dĩ nhiên liên quan đến bất đẳng thức, chứng minh rồi sử dụng một trong hai bất đẳng thức ở trên suy ra kết quả.

— Bất đẳng thức véctơ

Cho $\vec{u}=\left(a;b\right),\ \vec{v}=\left(x;y\right),\ \vec{w}=\left(m;n\right)$.

+ $\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\Rightarrow$ Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow ax=by$.

+ $\left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| + \left|\vec{w}\right|$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\vec{v},\vec{w}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{y} = \dfrac{b}{x} \\ \dfrac{m}{y} = \dfrac{n}{x} \end{array}\right.$.

+ $\vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương.

+ $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}}$. Do $\left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| \le 1$ nên

$$\frac{\left|ax+by\right|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}} \le 1 \Leftrightarrow \left|ax+by\right| \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2} \quad (*).$$

Bất đẳng thức $(*)$ được gọi là bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

II – CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 91. Giải phương trình: $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x} = x^2-10x+27 \quad (*)$

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 402 tháng 12 năm 2010

Nhận xét: Do vế phải có bậc lớn hơn vế trái nên rất nhiều khả năng sử dụng bất đẳng thức để giải. Nhận thấy rằng $\begin{cases} x^2-10x+27 = (x-5)^2+2 \ge 2 \\ (x-4)+(6-x) = 2 \end{cases}$ nên ta nghĩ đến việc áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho vế trái và biến đổi cơ bản ở vế phải.

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $4 \le x \le 6$.
- Đặt $\begin{cases} f(x) = VT = \sqrt{x-4}+\sqrt{6-x} \\ g(x) = VP = x^2-10x+27 \end{cases}$. Ta có:

$f(x) = x^2-10x+27 = (x-5)^2+2 \ge 2 \quad (1)$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = 5$.

$g(x) = 1\sqrt{x-4}+1\sqrt{6-x} \overset{B.C.S}{\le} \sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left[\left(\sqrt{x-4}\right)^2+\left(\sqrt{6-x}\right)\right]} = 2 \quad (2)$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{6-x}{1} \Leftrightarrow x = 5$.

- Nghiệm của phương trình thỏa mãn $\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{6-x} = 2 \\ x^2-10x+27 = 2 \end{cases}$, nghĩa là dấu " = " trong $(1),(2)$ đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x = 5$.
- Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

✍ **Lưu ý**: Do bất đẳng B.C.S là phần đọc thêm trong SGK lớp 10, nên ở công đoạn đánh giá $g(x)$ ta có thể thực hiện bằng bất đẳng thức Cauchy như sau:

$$\left[g(x)\right]^2 = 2 + 2\sqrt{(x-4)(6-x)} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} 2 + 2.\frac{(x-4)+(6-x)}{2} = 4 \Rightarrow g(x) \leq 2.$$

Thí dụ 92. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}=x^2-x+2 \quad (1)$

Nhận xét: Để ý rằng VT có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ nên ta nghĩ đến việc áp dụng bất đẳng thức B.C.S để tìm giá trị lớn nhất. Rồi sau đó, ta sẽ chứng minh VP lớn hơn hoặc bằng giá trị này.

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x^2+x-1 \geq 0 \\ x^2-x+1 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \ \vee\ x \geq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
- Áp dụng BĐT B.C.S cho các số 1; $\sqrt{x^2+x-1}$; 1; $\sqrt{x^2-x+1}$ ta được:

  $VT = \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1} \leq \sqrt{(1^2+1^2)\left[(x^2+x-1)+(x^2-x+1)\right]} = 2\sqrt{x}$.

  Hay $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1} \leq 2\sqrt{x} \quad (2)$
- Ta có: $VT - 2\sqrt{x} = x^2-x+2-2\sqrt{x} = (x-1)^2+(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$

  Hay $x^2-x+2 \geq 2\sqrt{x} \quad (3)$
- Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}=2\sqrt{x} \\ x^2-x+2=2\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow$ Dấu "=" trong $(2),(3)$

  đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-1}{1} = \dfrac{x^2-x+1}{1} \Leftrightarrow x = 1$.
- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Thí dụ 93. Giải phương trình: $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$.

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \geq -\dfrac{3}{2}$.
- Với điều kiện $x \geq -\dfrac{3}{2}$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $(2x+3)$, 1:

  $(2x+3)+1 \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{2x+3} = x^2+4x+5$

  $\Leftrightarrow 2x+4 \geq x^2+4x+5$

  $\Leftrightarrow x^2+2x+1 \leq 0$

  $\Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 0$

  $\Leftrightarrow x = -1$.
- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Thí dụ 94. Giải phương trình: $2\sqrt{7x^3 - 11x^2 + 25x - 12} = x^2 + 6x - 1 \quad (*)$

Nhận xét: Đây là bài toán có dạng $\sqrt{A} = B$ nhưng ta sẽ nhận được phương trình bậc bốn và khi đó cần tới kỹ năng nhẩm nghiệm của phương trình bậc cao và phép chia đa thức để chuyển phương trình về dạng tích số. Nhưng nếu ta để ý đến biểu thức trong $\sqrt{7x^3 - 11x^2 + 25x - 12} = \sqrt{(7x-4)(x^2 - x + 3)}$ mà có $(7x-4) + (x^2 - x + 3) = (x^2 + 6x - 1)$ làm ta liên tưởng đến việc đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy ngược dấu dạng: $2\sqrt{a.b} \le a + b;\ \forall a, b \ge 0$.

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{(7x-4)(x^2 - x + 3)} = x^2 + 6x - 1 \quad (1)$$

- Điều kiện: $x \ge \dfrac{4}{7}$ $\left(\text{do}: x^2 - x + 3 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\right)$.
- Ta có: $VT = 2\sqrt{(7x-4)(x^2 - x + 3)} \le x^2 + 6x - 1 = VP$.

  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (7x-4) = (x^2 - x + 3) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 7$.
- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1 \vee x = 7$.

Thí dụ 95. Giải phương trình: $x = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} \quad (1)$

Vô địch Toán Cộng Hòa Yugoslavia (Nam Tư) năm 1977

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge 1$.
- Ta có: $\begin{cases} \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} = \sqrt{1.\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \overset{\text{Cahcy}}{\le} \dfrac{1 + \left(x - \dfrac{1}{x}\right)}{2} \\ \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = \sqrt{\dfrac{1}{x}(x-1)} \overset{\text{Cahcy}}{\le} \dfrac{\dfrac{1}{x} + (x-1)}{2} \end{cases} \oplus \Rightarrow \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} \le x \quad (2)$
- Từ $(1), (2) \Rightarrow$ Dấu "=" trong (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{x} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \vee\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Thí dụ 96. Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2(x-1)} \quad (*)$

Hệ trung cấp trường Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1999

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2} \quad (1)$$

- Ta có: $1.\sqrt{x-1} + 1.(x-3) \overset{B.C.S}{\leq} \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{(x-3)^2 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + x - 3 \leq \sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2} \quad (2)$$

- Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi : $\dfrac{\sqrt{x-1}}{1} = \dfrac{x-3}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 5 \vee x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \quad (3).$$

- Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Thí dụ 97. Giải phương trình: $\sqrt[4]{-x^2+6x-8} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} = x^3 + 30 \quad (1)$

Nhận xét: Do biểu thức $\sqrt[4]{-x^2+6x-8} = \sqrt[4]{(4-x)(x-2)} = \sqrt{\sqrt{(4-x)(x-2)}}$ giúp ta suy nghĩ đến việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy ngược dấu dạng: $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ và $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$ có dạng $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ nên áp dụng bất đẳng thức B.C.S. Công việc khó khăn hơn là việc tách ghép để áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho biểu thức $6x\sqrt{3x}$ để sau khi áp dụng ta được kết quả dạng $x^3 + \alpha$ (do các biểu thức trước khi áp dụng cho hằng số). Cụ thể ta biến đổi $6x\sqrt{3x} = 2.\sqrt{27.x^3}$.

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $2 \leq x \leq 4$.
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\sqrt[4]{-x^2+6x-8} = \sqrt{\sqrt{(4-x)(x-2)}} \leq \sqrt{\frac{(4-x)+(x-2)}{2}} = 1 \quad (2)$$

$$6x\sqrt{3x} = 2.\sqrt{27.x^3} \leq 27 + x^3 \quad (3)$$

- Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta được:

$$\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 1.\sqrt{\sqrt{x-2}} + 1.\sqrt{\sqrt{4-x}} \overset{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2+1^2)\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} \leq \sqrt{2}\sqrt{1.\sqrt{x-2} + 1.\sqrt{4-x}} \leq \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{(1^2+1^2)(x-2+4-x)}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} \leq \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{4}} = 2 \quad (4)$$

- Lấy $(2)+(3)+(4) \Rightarrow \sqrt[4]{-x^2+6x-8} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} \leq x^3 + 30 \quad (5)$

- Từ $(1),(5) \Rightarrow$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu $"="$ trong $(2),(3),(4)$ đồng thời xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x = x-2 \\ 27 = x^3 \\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{4-x}{1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 3$.

Thí dụ 98. Giải phương trình: $4+4x-x^2 = \left|x-1\right| + \left|x-2\right| + \left|2x-3\right| + \left|4x-14\right|$

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 402 tháng 12 năm 2010

Bài giải tham khảo

$$VP = \left|x-1\right| + \left|x-2\right| + \left|2x-3\right| + \left|4x-14\right| \ge \left|x-1+x-2+2x-3+4x-14\right| = 8 \quad (1)$$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x = 2$.

$$VT = 8-(x-2)^2 \le 8 \quad (2)$$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x = 2$.

- Từ $(1),(2) \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Thí dụ 99. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}+7}{x+1}} + 4x = 3\sqrt{2}-1 \quad (1)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x > -1$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}} + 4(x+1) = 3\sqrt{2}+3 \quad (2)$$

- Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số không âm: $\sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}},\ \sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}},\ 4(x+1)$ ta được:

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}} + \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}} + 4(x+1) \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}.\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}}.4(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}} + 4(x+1) \ge 3.\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}} + 4(x+1) \ge 3\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{x+1}} + 4(x+1) \ge 3\sqrt{2}+3 \quad (3)$$

- Từ $(2),(3) \Rightarrow$ dấu " = " trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}} = 4(x+1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)}} = 4(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+1) \ge 0 \\ \dfrac{5\sqrt{2}+7}{4(x+1)} = \left[4(x+1)\right]^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[4(x+1)\right]^3 = \left(\sqrt{2}+1\right)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4(x+1) = \sqrt{2}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{2}}{4}.$$

- Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{-3+\sqrt{2}}{4}$.

Thí dụ 100. Giải phương trình: $3x^4 - 4x^3 = 1 - \sqrt{\left(1+x^2\right)^3} \quad (1)$

Bài giải tham khảo

- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm, ta được:

$$\left(1+\frac{3}{2}x^2\right) + \left(1+\frac{3}{2}x^2\right) + 1 \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 3\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{2}x^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3x^2 \ge 3\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{2}x^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 \ge \left(1+\frac{3}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} \ge \left(1+\frac{3}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(1+x^2\right)^3} \ge 1 + \frac{3}{2}x^2 \qquad (2)$$

- Ta lại có: $\begin{cases} x^4 + 2x^4 \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 2\sqrt{2x^8} \\ x^2 + \dfrac{1}{2}x^2 \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 2\sqrt{x^2.\dfrac{1}{2}x^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^4 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ge 2\sqrt{2x^8} + 2\sqrt{x^2.\frac{1}{2}x^2} \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 2.\sqrt{2\sqrt{2x^8}.2\sqrt{x^2.\frac{1}{2}x^2}}$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^4 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ge 4\sqrt{\sqrt{2x^8.x^2.\frac{1}{2}.x^2}}$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 + \frac{3}{2}x^2 \ge 4x^3 \qquad (3)$$

- Cộng $(2),(3)$ ta được: $\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}+3x^4+\dfrac{3}{2}x^2\geq 1+\dfrac{3}{2}x^2+4x^3$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(1+x^2\right)^3}+3x^4\geq 1+4x^3$

$\Leftrightarrow 3x^4-4x^3\geq 1-\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}\quad (4)$

- Từ $(1),(4)\Rightarrow$ Dấu $"="$ trong $(2),(3)$ đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Thí dụ 101. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\leq 2$.

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x\geq 1$.
- Ta có: $VT=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\overset{\text{Cauchy}}{\geq}2\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$.
- Bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow VT=2\Leftrightarrow \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow x=1$.

Thí dụ 102. Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\geq x\quad (1)$

Đại học Ngoại Thương cơ sở II Tp. Hồ Chí Minh khối A – B năm 2001

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases}1+x\geq 0\\1-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.
- Với $x\in[-1;1]$ thì $(1)\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\geq x$

$\Leftrightarrow 2x\geq x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\quad (2)$

- Với $x=0$ thì (2) luôn đúng $\Rightarrow x=0$ là một nghiệm của (1).
- Với $x\in(0;1]$ thì $(2)\Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\leq 2$. Điều này luôn thỏa vì

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\overset{\text{B.C.S}}{\leq}\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(1+x+1-x\right)}=2\quad (3)$.

$\Rightarrow x\in(0;1]$ là tập nghiệm của (1).

- Với $x\in[-1;0)$ thì $(2)\Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\geq 2$. Trái hoàn toàn với (3). Do đó, $x\in[-1;0)$ không là tập nghiệm của (1).
- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x\in[0;1]$.

Thí dụ 103. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}\quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}=\sqrt{29}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(-x-1)^2+3^2}=\sqrt{29}$$

- Đặt $\begin{cases}\vec{u}=(x-1;\ 2)\\ \vec{v}=(-1-x;\ 3)\\ \vec{u}+\vec{v}=(-2;5)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(x-1)^2+2^2}\\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{(-1-x)^2+3^2}\\ \left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29}\end{cases}$.

$$\Rightarrow \begin{cases}\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|=\sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(-x-1)^2+3^2}=VT\\ \left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{29}=VP\end{cases}.$$

- Mặt khác: $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ và dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow 3(x-1)-2(-1-x)=0 \Leftrightarrow 5x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}.$$

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{5}$.

<u>Thí dụ 104.</u> Giải bất phương trình: $\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}\le\sqrt{x-1}+x-3 \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x\ge1$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2}.\sqrt{(x-3)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}\le\sqrt{x-1}+x-3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{(x-3)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}\le\sqrt{x-1}+x-3 \quad (1)$$

- Đặt $\begin{cases}\vec{u}=\left(x-3;\sqrt{x-1}\right)\\ \vec{v}=(1;1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(x-3)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}\\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\end{cases}$.

$$\Rightarrow \begin{cases}\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=\sqrt{2}.\sqrt{(x-3)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=VT\\ \vec{u}.\vec{v}=\sqrt{x-1}+x-3=VP\end{cases}.$$

- Mặt khác: $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\ge\vec{u}.\vec{v} \Leftrightarrow \sqrt{2}.\sqrt{(x-3)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}\ge\sqrt{x-1}+x-3 \quad (2)$
- Từ $(1),(2) \Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm khi đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu " = " trong (2)

xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow x-3=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge3\\ (x-3)^2=x-1\end{cases} \Leftrightarrow x=5$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 379. Giải phương trình: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

ĐS: $x=3$.

Bài tập 380. Giải phương trình: $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=x^2-12x+38$.

ĐS: $x=2$.

Bài tập 381. Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$.

ĐS: $x=2$.

Bài tập 382. Giải phương trình: $2x^3+\dfrac{3}{x^2}=5,\ \left(x\in\mathbb{Z}^+\right)$.

ĐS: $x=1$.

Bài tập 383. Giải phương trình: $\dfrac{3}{\left|x+1\right|}+\dfrac{\left|x+1\right|}{3}=2$.

ĐS: $x=-4\ \vee\ x=2$.

Bài tập 384. Giải bất phương trình: $\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|+4\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\ge 4a$.

ĐS: $\left|x\right|\ge\left|a\right|$.

Bài tập 385. Giải bất phương trình: $\left|x\right|\sqrt{1-x}+\left|x-1\right|\sqrt{x}\le 1$.

HD: Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki $\Rightarrow x\in\left[0;1\right]$.

Bài tập 386. Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

HD: Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki $\Rightarrow x=1$.

Bài tập 387. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x^2-10x+16}\ge 3-x$.

HD: Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki $\Rightarrow x=2\ \vee\ x=5$.

Bài tập 388. Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}=\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}$.

HD: Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki $\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 389. Giải phương trình: $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}=3$.

HD: Sử dụng BĐT Cauchy + B.C.S $\Rightarrow x=0$.

Bài tập 390. Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2-x^2}=2$.

ĐS: $x=1$.

Bài tập 391. Giải các phương trình sau

1/ $\sqrt{x-6}+\sqrt{x-2}=x^2-6x+13$.

2/ $\sqrt{2x-1}+\sqrt{19x-2x}=\dfrac{6}{-x^2+10x-24}$.

3/ $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{-3x^2+3x+1}$.

4/ $\sqrt{25x\left(2x^2+9\right)}=4x+\dfrac{3}{x}$.

5/ $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=1-x^2+2x$.

6/ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$.

7/ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{2x^2+4x+3}=2-2x-x^2$.

8/ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=\sqrt{24-2x-x^2}$.

9/ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=2+2x-x^2$.

10/ $\sqrt{x^2-6x+11}+\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt[4]{x^2-4x+5}=3+\sqrt{2}$.

11/ $\sqrt{5x^3+3x^2+3x-1}=\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 392. Giải phương trình: $3x+\sqrt[4]{2-x^4}=3+x^2$.

HD: $\begin{cases}\sqrt[4]{2-x^4}\le\dfrac{5-x^4}{4}\\ x^2-3x+3\ge\dfrac{5-x^4}{4}\end{cases}\Rightarrow x=1$.

Bài tập 393. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(7x^2-x+4\right)$.

ĐS: $x=-1$.

Bài tập 394. Giải phương trình: $\sqrt{4x-x^3}+\sqrt{x+x^3}=3\sqrt[4]{3}$.

HD: $\left(2.VT\right)^2=\left(\sqrt{2}\sqrt{8x-2x^3}+2\sqrt{x+x^3}\right)^2\le 6\left(9x-x^3\right)\le 36\sqrt{3}\Rightarrow x=\sqrt{3}$.

Bài tập 395. Giải phương trình: $\sqrt{3x^3+x^2}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{5x^3+5x}$.

ĐS: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 396. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$.

ĐS: $x=\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 397. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=2$.

HD: Đặt $\begin{cases} \vec{u} = \left(x - \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \vec{v} = \left(-x - \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$ và nghiệm $x = 0$.

Bài tập 398. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{9x^2 - 12x + 13}$.

HD: Đặt $\begin{cases} \vec{u} = \left(2x - 1;\ 1\right) \\ \vec{v} = \left(x - 1;\ 2\right) \end{cases}$ và nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

Bài tập 399. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 4y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 10} = 5$.

HD: Đặt $\begin{cases} \vec{u} = \left(x + 3;\ 2y\right) \\ \vec{v} = \left(1 - x;\ 3 - 2y\right) \end{cases}$ và nghiệm $x = 1,\ y = \frac{3}{2}$.

Bài tập 400. Giải phương trình: $\left|\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50}\right| = 5$.

HD: Chọn $\begin{cases} A\left(2;\ 1\right) \\ B\left(5;\ 5\right) \\ C\left(x;\ 0\right) \end{cases}$ và nghiệm $x = \frac{5}{4}$.

Bài tập 401. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \le 1$.

HD: Đặt $\begin{cases} \vec{u} = \left(x + \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \vec{v} = \left(x - \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$ và nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 402. Giải PT: $\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 + \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 1} + \sqrt{2x^2 - \left(\sqrt{3} - 1\right)x + 1} = 3$.

HD: Chọn $\begin{cases} A\left(1;1\right) \\ B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right) \\ C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right) \\ M\left(x;\ x\right) \end{cases}$ và $x = 0$.

Bài tập 403. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 6x + 18} = 5\sqrt{2}$.

HD: Chọn $\begin{cases} A\left(x - 4;-4\right) \\ B\left(x - 3;\ 3\right) \\ O\left(0;\ 0\right) \end{cases}$ $\Rightarrow x = \frac{24}{7}$.

Bài tập 404. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x+6}=\sqrt{17}$.

ĐS: $x=-\frac{1}{2}$.

Bài tập 405. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-6x+10}=\sqrt{5}$.

ĐS: $x=5$.

Bài tập 406. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{13}$.

ĐS: $x=\frac{1}{3}$.

Bài tập 407. Giải phương trình: $\left(3-x\right)\sqrt{x-1}+\sqrt{5-2x}=\sqrt{40-34x+10x^2-x^3}$.

HD: Lưu ý biến đổi: $40-34x+10x^2-x^3=\left(4-x\right)\left[\left(2-x\right)^2+1\right]\Rightarrow x=3$.

Bài tập 408. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$.

ĐS: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 409. Giải phương trình: $\sqrt{5x+1}+2\sqrt{4-x}+\sqrt{5x+10}=\sqrt{61-4x}$.

ĐS: $x=-\frac{13}{129}$.

Bài tập 410. Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}+4\sqrt{5-x}=12$.

ĐS: $x=1$.

Bài tập 411. Giải phương trình: $x+2\sqrt{x+3}+4\sqrt{2-x^2}=3\sqrt{11+x-3x^2}$.

ĐS: $x=1$.

Bài tập 412. Giải phương trình: $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$.

HD: Đặt $\begin{cases}\vec{u}=\left(x;1\right)\\ \vec{v}=\left(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x}\right)\end{cases}\Rightarrow x=1\ \vee\ x=1+\sqrt{2}$.

E – GIẢI PHƯƠNG TRÌNH & BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA



I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

— Một lớp các phương trình vô tỷ có thể giải được bằng phương pháp chuyển về phương trình lượng giác (hay ngược lại).

— Dấu hiệu nhận biết là trong phương trình xuất hiện các biểu thức $\sqrt{1-x^2},\ \sqrt{x^2+1},\ \sqrt{x^2-1}$,...

— Lợi thế của phương pháp này là đưa phương trình ban đầu về một phương trình lượng giác cơ bản đã biết cách giải như: phương trình đẳng cấp, đối xứng, cổ điển, ……

— Nhược điểm của phương pháp này là khi chuyển về lượng giác lại khó tìm được nghiệm tường minh của phương trình.

— Vì hàm lượng giác là tuần hoàn, nên khi đặt điều kiện các biểu thức lượng giác thật khéo léo sao cho lúc khai căn không có giá trị tuyệt đối, có nghĩa là luôn luôn dương

(Dựa vào điều kiện $+$ vòng tròn lượng giác)

— Một số phương pháp lượng giác hóa thường gặp

Bài toán có chứa	***Lượng giác hóa bằng cách đặt***
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\left[\begin{array}{ll} x=\lvert a\rvert\sin t, & \text{ĐK}:\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \\ x=\lvert a\rvert\cos t, & \text{ĐK}:\ t\in\left[0;\pi\right] \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\left[\begin{array}{ll} x=\dfrac{\lvert a\rvert}{\sin t}, & \text{ĐK}:\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{0\right\} \\ x=\dfrac{\lvert a\rvert}{\cos t}, & \text{ĐK}:\ t\in\left[0;\pi\right]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \end{array}\right.$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\left[\begin{array}{ll} x=\lvert a\rvert\tan t, & \text{ĐK}:\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \\ x=\lvert a\rvert\cot t, & \text{ĐK}:\ t\in\left(0;\pi\right) \end{array}\right.$
$\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\ \vee\ \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$	$x=a\cos 2t,\quad \text{ĐK}: \cos 2t\in\left[-1;1\right]$
$\sqrt{\left(x-a\right)\left(b-x\right)}$	$x=a+\left(b-a\right)\sin^2 t$

✍ **Lưu ý**: Xem lại các công thức lượng giác và phương pháp giải phương trình lượng giác (chuyên đề: Phương trình lượng giác và ứng dụng của cùng tác giả).

II – CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 105. Giải phương trình: $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}$ $\quad (*)$

Đề nghị Olympic 30 – 04 – 2003

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.
- Đặt $x = \cos t,\ t \in \left[0;\pi\right] \Rightarrow \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = \left|\sin t\right| = \sin t$.

$$(*) \Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t = \sin t$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \dfrac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = -\dfrac{\pi}{2} + t + k2\pi \end{array}\right.,\ \left(k \in \mathbb{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \\ t = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.,\ \left(k \in \mathbb{R}\right)$$

- Do $t \in \left[0;\pi\right] \Rightarrow x = \cos\dfrac{\pi}{8} \ \vee\ x = \cos\dfrac{5\pi}{8} \ \vee\ x = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Thí dụ 106. Giải phương trình: $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x\left(1 + 2\sqrt{1 - x^2}\right)$ $\quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.
- Đặt $x = \sin t,\ t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \left|\cos t\right| = \cos t$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{1 + \cos t} = \sin t\left(1 + 2\cos t\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}} = \sin t + \sin 2t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = 2\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{t}{2} = 0 \\ \sin\dfrac{3t}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{t}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ \dfrac{3t}{2}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \ \vee \ \dfrac{3t}{2}=\pi-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\pi+k2\pi \\ t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k4\pi}{3} \ \vee \ t=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k4\pi}{3} \end{array}\right.,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

- Do $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6} \ \vee \ t=\dfrac{\pi}{2}$.
- Với $\begin{cases} t=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow x=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\sin\dfrac{\pi}{2}=1 \end{cases}$.
- Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\dfrac{1}{2} \ \vee \ x=1$.

Thí dụ 107. Giải phương trình: $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2} \qquad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x>0 \end{cases}\Leftrightarrow x>1$.
- Đặt $x=\dfrac{1}{\cos t},\ t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}-1}=\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\sqrt{\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\dfrac{\sin t}{\cos t}$.

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\cos t}.\frac{\cos t}{\sin t}=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin t+\cos t=2\sqrt{2}\sin t\cos t\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 2t$$

$$\Leftrightarrow\sin 2t=\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2t=t+\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2t=\pi-t-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

- Do $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\sqrt{2}$.

Thí dụ 108. Giải phương trình: $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}} \qquad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$.
- Đặt $x = \dfrac{1}{2}\cos t,\ t \in \left[0;\pi\right] \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-2x} = \sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2\sin^2\dfrac{t}{2}} = \sqrt{2}\sin\dfrac{t}{2} \\ \sqrt{1+2x} = \sqrt{1+\cos t} = \sqrt{2\cos^2\dfrac{t}{2}} = \sqrt{2}\cos\dfrac{t}{2} \\ \sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}} = \dfrac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}} = \tan\dfrac{t}{2};\ \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}} = \cot\dfrac{t}{2} \end{cases}$.

$\left(*\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\dfrac{t}{2} + \sqrt{2}\cos\dfrac{t}{2} = \tan\dfrac{t}{2} + \cot\dfrac{t}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sin\dfrac{t}{2} + \cos\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{\sin\dfrac{t}{2} + \cos\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}$

$\Leftrightarrow \left(\sin\dfrac{t}{2} + \cos\dfrac{t}{2}\right)\left(\sqrt{2} - \dfrac{2}{\sin t}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin t = \sqrt{2}\quad \left(L\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \dfrac{t}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

- Do $t \in \left[0;\pi\right],\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

<u>Thí dụ 109.</u> Giải phương trình: $\sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2+1}{2x} = \dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$ $\quad\left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x \neq 0,\ x \neq \pm 1$.
- Đặt $x = \tan t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \backslash \left\{0;\pm\dfrac{\pi}{4}\right\}$.
- Ta có:

$x^2 + 1 = \tan^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\cos t}$.

$\sin 2t = \dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{2x} = \dfrac{1}{\sin 2t}$.

$\cos 2t = \dfrac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 2\sin 2t\cos 2t = \dfrac{4x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin 4t} = \dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$.

$\left(*\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos t} + \dfrac{1}{\sin 2t} = \dfrac{2}{\sin 4t}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2\sin t\cos t} - \frac{1}{2\sin t\cos t\cos 2t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t}\left[1 + \frac{1}{2\sin t} - \frac{1}{2\sin t\left(1 - 2\sin^2 t\right)}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin t\left(1 - 2\sin^2 t\right) + \left(1 - 2\sin^2 t\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^3 t + \sin^2 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin t = 0 & (L) \\ \sin t = \dfrac{1}{2} & (N) \\ \sin t = -1 & (L) \end{array}\right.$$

- Với $\sin t = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee t = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$.
- Do $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0; \pm\dfrac{\pi}{4}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

<u>Thí dụ 110.</u> Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 1} = \dfrac{\left(x^2 + 1\right)^3}{6x^5 - 20x^3 + 6x} \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x \neq \pm\sqrt{3} \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{6x}{1 + x^2} - 4\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)^3 \quad (1)$$

- Đặt $x = \tan t, \ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \ \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0; \ \pm\dfrac{\pi}{3}; \ \pm\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

$$(1) \Leftrightarrow \cos t = 3\sin 2t - 4\sin^3 2t = \sin 6t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6t\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{2} - 6t + k2\pi \\ t = 6t - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7} \\ t = \dfrac{\pi}{10} - \dfrac{k2\pi}{5} \end{array}\right., \ (k \in \mathbb{Z}).$$

- Do $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \ \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0; \ \pm\dfrac{\pi}{3}; \ \pm\dfrac{\pi}{6}\right\} \Rightarrow t = \left\{-\dfrac{5\pi}{14}; -\dfrac{3\pi}{14}; -\dfrac{\pi}{10}; -\dfrac{\pi}{14}; \dfrac{\pi}{18}; \dfrac{\pi}{14}; \dfrac{3\pi}{14}; \dfrac{5\pi}{14}\right\}$.

$$\Rightarrow x \in \left\{\tan\left(-\frac{5\pi}{14}\right); \tan\left(-\frac{3\pi}{14}\right); \tan\left(-\frac{\pi}{10}\right); \tan\left(-\frac{\pi}{14}\right); \tan\frac{\pi}{18}; \tan\frac{\pi}{14}; \tan\frac{3\pi}{14}; \tan\frac{5\pi}{14}\right\}.$$

Thí dụ 111. Giải phương trình: $x^3 - 3x = \sqrt{x+2} \quad (*)$

Đề nghị Olympic 30 – 04 – 2006

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge 2$.
- Nếu $x > 2$ thì $x^3 - 3x = x + x\left(x^2 - 4\right) > x > \sqrt{x+2}$ nên phương trình đã cho không có nghiệm khi $x > 2$.
- Nếu $-2 \le x \le 2$ thì đặt $x = 2\cos t,\ t \in \left[0;\pi\right]$.

$$(*) \Leftrightarrow 8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2\cos t + 2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(4\cos^3 t - 3\cos t\right) = \sqrt{2\left(\cos t + 1\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3t = \sqrt{2.2\cos^2\frac{t}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3t = \frac{t}{2} + k2\pi \ \vee\ 3t = -\frac{t}{2} + k2\pi,\quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{k4\pi}{5} \ \vee\ t = \frac{k4\pi}{7},\ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

- Do $t \in \left[0;\pi\right] \Rightarrow t = 0 \ \vee\ t = \frac{4\pi}{7} \ \vee\ t = \frac{4\pi}{5}$.
- Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2 \ \vee\ x = 2\cos\frac{4\pi}{7} \ \vee\ x = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

Thí dụ 112. Giải phương trình: $x^3 + \sqrt{\left(1 - x^2\right)^3} = x\sqrt{2 - 2x^2} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.
- Đặt $x = \cos t,\ t \in \left[0;\pi\right]$.

$$(*) \Leftrightarrow \cos^3 t + \sqrt{\left(1 - \cos^2 t\right)^3} = \cos t\sqrt{2\left(1 - \cos^2 t\right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 t + \sqrt{\left(\sin^2 t\right)^3} = \cos t\sqrt{2\sin^2 t}$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 t + \cos^3 t = \sqrt{2}\sin t\cos t$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin t + \cos t\right)\left(1 - \sin t\cos t\right) = \sqrt{2}\sin t\cos t \quad (1)$$

- Đặt $u = \sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow u^2 = 1 + 2\sin t\cos t \Leftrightarrow \sin t\cos t = \frac{u^2 - 1}{2}$.

  Do $0 \le t \le \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le t + \frac{\pi}{4} \le \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4} \le \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \le \sin\frac{5\pi}{4} \Rightarrow u \in \left[-\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$.

$\left(1\right) \Leftrightarrow u\left(1 - \frac{u^2 - 1}{2}\right) = \sqrt{2}.\frac{u^2 - 1}{2}$

$\Leftrightarrow u^3 + \sqrt{2}u^2 - 3u - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(u - \sqrt{2}\right)\left(u^2 + 2\sqrt{2}u + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{2} & \left(N\right) \\ u = -\sqrt{2} + 1 & \left(N\right) \\ u = -\sqrt{2} - 1 < -\sqrt{2} & \left(L\right) \end{array}\right.$$

- Với $u = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Với $\begin{cases} u = \sin t + \cos t = 1 - \sqrt{2} \\ \sin t\cos t = \frac{u^2 - 1}{2} = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad \left(2\right)$

  Theo định lí Viét thì $\sin t,\ \cos t$ là nghiệm của phương trình bậc hai:

  $$X^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)X + 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 3\right)}}{2}.$$

  Do $\sin t \ge 0 \Rightarrow x = \cos t = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 3\right)}}{2}$.

- Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 3\right)}}{2}$.

✍ **Cách giải khác**: Đặt ẩn phụ.

- Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.
- Đặt $t = x + \sqrt{1 - x^2}$.

  $t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t \in \left[-1; \sqrt{2}\right]$.

- Khi đó: $2x\sqrt{1 - x^2} = t^2 - 1$ và $2\left(x^3 + \sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}\right) = -t^3 + 3t$.

$\left(*\right) \Leftrightarrow -t^3 + 3t = \sqrt{2}\left(t^2 - 1\right)$

$$\Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=\sqrt{2} & \left(N\right) \\ t=1-\sqrt{2} & \left(N\right) \\ t=-1-\sqrt{2} & \left(L\right) \end{array}\right..$$

- Với $t=\sqrt{2} \Rightarrow x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- $t=1-\sqrt{2} \Rightarrow x+\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.
- Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

<u>Thí dụ 113.</u> Giải phương trình: $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1 \quad \left(*\right)$

HSG – Trường THPT Năng Khiếu – Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 2000

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.
- Đặt $x=\cos t,\ t\in\left[0;\pi\right] \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x}=\sqrt{1-\cos t}=\sqrt{2\sin^2\dfrac{t}{2}}=\sqrt{2}\sin\dfrac{t}{2} \\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sin t \end{cases}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 2\cos^2 t+\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}+2\cos t.\sin t=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}+\sin 2t=1-2\cos^2 t$$

$$\Leftrightarrow \cos 2t+\sin 2t=-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2t-\frac{\pi}{4}=\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}+k2\pi \ \vee\ 2t-\frac{\pi}{4}=-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}+\frac{k4\pi}{3} \ \vee\ t=-\frac{\pi}{10}+\frac{k4\pi}{5},\quad \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

- Do $t\in\left[0;\pi\right] \Rightarrow x=\cos\dfrac{\pi}{2}=0;\ x=\cos\dfrac{7\pi}{10}$.
- Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=0 \vee x=\cos\dfrac{7\pi}{10}$.

<u>Thí dụ 114.</u> Giải phương trình: $8x\left(2x^2-1\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=1 \quad \left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$(*) \Leftrightarrow 8x\left(2x^2-1\right)\left[2\left(2x^2-1\right)^2-1\right]=1 \quad (2)$$

- Trường hợp 1. $x \geq 1 \Rightarrow$ Vế trái $>1 \Rightarrow (2):$ vô nghiệm $\Leftrightarrow (1):$ vô nghiệm.
- Trường hợp 2. $x \leq -1 \Rightarrow$ vế trái $<0 \Rightarrow (2):$ vô nghiệm $\Leftrightarrow (1):$ vô nghiệm.
- Trường hợp 3. $-1 \leq x \leq 1:$ đặt $x=\cos t,\ t\in[0;\pi]$.

$$(2) \Leftrightarrow 8\cos t\left(2\cos^2 t-1\right)\left[2\left(2\cos^2 t-1\right)^2-1\right]=1$$

$$\Leftrightarrow 8\cos t.\cos 2t\left(2\cos^2 2t-1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 8\cos t.\cos 2t\cos 4t=1$$

$$\Leftrightarrow 8\sin t\cos t.\cos 2t.\cos 4t=\sin t$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 2t\cos 2t\cos 4t=\sin t$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4t\cos 4t=\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sin 8t=\sin t$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8t=t+k2\pi\\8t=\pi-t+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{k2\pi}{7}\\t=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{9}\end{array}\right.,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

- Do $t\in[0;\pi] \Rightarrow t\in\left\{\dfrac{2\pi}{7};\ \dfrac{4\pi}{7};\ \dfrac{6\pi}{7};\ \dfrac{\pi}{9};\ \dfrac{5\pi}{9};\ \dfrac{7\pi}{9}\right\}$.

$$\Rightarrow x\in\left\{\cos\frac{2\pi}{7};\ \cos\frac{4\pi}{7};\ \cos\frac{6\pi}{7};\ \cos\frac{\pi}{9};\ \cos\frac{5\pi}{9};\ \cos\frac{7\pi}{9}\right\}.$$

Thí dụ 115. Giải phương trình: $128x^2\left(4x^2-1\right)\left(8x^2-1\right)^2+1-2x=0 \quad (*)$ với $-\dfrac{1}{2}<x<0$.

Học Viện Quân Y năm 2001

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-1)\left[128x^2(2x+1)\left(8x^2-1\right)^2-1\right]=0\\-\dfrac{1}{2}<x<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}32(2x)^2(2x+1)\left[2(4x)^2-1\right]^2=1\\-\dfrac{1}{2}<x<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x=\cos t,\ t\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\\32\cos^2 t(\cos t+1)\left(2\cos^2 t-1\right)^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}64\cos^2\dfrac{t}{2}\cos^2 t\cos^2 2t=1\\2x=\cos t,\ t\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x=\cos t,\ t\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow\sin^2\dfrac{t}{2}>0\\64\sin^2\dfrac{t}{2}\cos^2\dfrac{t}{2}\cos^2 t\cos^2 2t=\sin^2\dfrac{t}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=\cos t,\ t\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\\\sin^2 4t=\sin^2\dfrac{t}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \cos t,\ t \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \\ \cos 8t = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t,\ t \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \\ t = \left\{\dfrac{4\pi}{7};\dfrac{6\pi}{7};\dfrac{8\pi}{9};\dfrac{2\pi}{3}\right\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \left\{\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{7};-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7};-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9};-\frac{1}{4}\right\}.$$

Thí dụ 116. Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \le 2-\dfrac{x^2}{4}\quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.
- Đặt $x = \cos t,\ t \in [0;\pi]$.

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t} \le 2-\frac{\cos^2 t}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \le 2-\sin^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \le 2-\left[1-\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^4\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]^2\left[\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+2\right] \ge 0 \quad (**)$$

- Vì $(**)$ luôn đúng $\forall t \in [0;\pi]$ nên tập nghiệm của $(*)$ là $x \in [-1;1]$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 413. Giải phương trình: $8x^3-6x-\sqrt{3}=0$.

ĐS: $x = \cos\dfrac{\pi}{18} \vee x = \cos\dfrac{11\pi}{18} \vee x = \cos\dfrac{13\pi}{18}$.

Bài tập 414. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = 2+\sqrt{1-x^2}$.

HD: $x = \cos t,\ t \in [0;\pi]$.

Bài tập 415. Giải phương trình: $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}} = x$.

HD: Điều kiện $0 < x \le 1$, $x = \cos t,\ t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài tập 416. Giải phương trình: $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{5}{2\sqrt{1+x^2}} + x$.

HD: $x = \tan t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập 417. Giải phương trình: $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$.

ĐS: $x = \dfrac{5}{3} \vee x = \dfrac{5}{4}$.

Bài tập 418. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{x}{4x^2-1}$.

ĐS: $x = \cos\dfrac{\pi}{8} \vee x = \cos\dfrac{5\pi}{8} \vee x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 419. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{x}{16x^4 - 12x^2 + 1}$.

ĐS: $x \in \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \cos\dfrac{\pi}{12};\ \cos\dfrac{\pi}{8};\ \cos\dfrac{5\pi}{12};\ \cos\dfrac{5\pi}{8}\right\}$.

Bài tập 420. Giải phương trình: $\sqrt{1-x^2}\left(16x^4 - 12x^2 + 1\right) = 4x^3 - 3x$.

ĐS: $x \in \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \cos\dfrac{\pi}{16};\ \cos\dfrac{5\pi}{16};\ \cos\dfrac{9\pi}{16};\ \cos\dfrac{13\pi}{16}\right\}$.

Bài tập 421. Giải phương trình: $2x + \left(4x^2 - 1\right)\sqrt{1-x^2} = 4x^3 + \sqrt{1-x^2}$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 422. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{1}{2} - x\sqrt{1-x^2}} = 1 - 2x^2$.

Đề nghị Olympic – THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Quảng Trị

ĐS: $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$.

Bài tập 423. Giải phương trình: $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x^2}$.

HD: Đặt $x = \dfrac{1}{\sin t} \Rightarrow x = -\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$.

Bài tập 424. Giải phương trình: $1 + \dfrac{3}{\sqrt{x^2-9}} = \dfrac{1}{x}$.

HD: Đặt $x = \dfrac{3}{\cos t} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$.

Bài tập 425. Giải phương trình: $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

HD: Đặt $x = \cos t \Rightarrow PT: \dfrac{2+\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{t}{2} - \sin\dfrac{t}{2}\right)}{1+\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{t}{2} - \sin\dfrac{t}{2}\right) - \sin t}.\sin t = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 426. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-4x^2}} = x\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1+2\sqrt{1-4x^2}}}\right)$.

ĐS: $x = \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 427. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right] = \dfrac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\dfrac{1-x^2}{3}}$.

HD: Đặt $x = \cos t$, $PT \Leftrightarrow (2+\sin t)(\sqrt{6}\cos t - 1) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài tập 428. Giải phương trình: $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

ĐS: $x = \cos\dfrac{3\pi}{10}$.

Bài tập 429. Giải phương trình: $64x^3 - 112x^2 + 56x - 7 = 2\sqrt{1-x}$.

ĐS: $x = \cos^2\dfrac{\pi}{18} \ \vee\ x = \cos^2\dfrac{3\pi}{18} \ \vee\ x = \cos^2\dfrac{5\pi}{18}$.

Bài tập 430. Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = 3$.

HD: Đặt $\begin{cases}\sqrt{3}\sin t = \sqrt{1+x}\\ \sqrt{3}\cos t = \sqrt{8-x}\end{cases}$, $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = -1 \ \vee\ x = 8$.

Bài tập 431. Giải phương trình: $1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

HD: $x = \cos^2 t$, $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Bài tập 432. Giải phương trình: $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

HD: $x = \cos t$, $t \in [0;\pi]$.

Bài tập 433. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

HD: $x = \cos t,\ t \in [0;\pi]$.

Bài tập 434. Giải phương trình: $\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2}{x^2+1} = 4$.

HD: Đặt $x = \tan t,\ \ t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Bài tập 435. Giải phương trình: $\left(64x^3 - 112x^2 + 56x - 7\right)^2 + 4x = 4$.

HD: Đặt $x = \cos^2 t,\ t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{3}{4};\cos^2\dfrac{\pi}{18};\cos^2\dfrac{5\pi}{18};\cos^2\dfrac{7\pi}{18};\cos^2\dfrac{\pi}{10};\cos^2\dfrac{3\pi}{10}\right\}$.

Bài tập 436. Giải bất phương trình: $\dfrac{1}{1-x^2} > \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$.

HD: Đặt $x = \sin t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x \in \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5};1\right) \cup \left(-1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài tập 437. Giải bất phương trình: $\sqrt{\left(1-x^2\right)^5} + \sqrt{x^5} \le 1$.

HD: $x = \cos t,\ t \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in [-1;1]$.

Bài tập 438. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right) = 2 + \sqrt{1-x^2}$.

1984 Vietnamese Mathematical Olympiad

ĐS: $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 439. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+a^2} \le x + \dfrac{2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}},\ (a \ne 0)$.

ĐS: $x \in \left[-\dfrac{|a|\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$.

Bài tập 440. Giải phương trình: $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \le x$.

ĐS: $x \in [-1;0]$.

F – GIẢI PHƯƠNG TRÌNH & BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

— **Định lí 1**. Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = a$ không nhiều hơn một và $\boxed{\forall u, v \in D:\ f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v}$.

— **Định lí 2**. Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đơn điệu ngược chiều và liên tục trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

— **Định lí 3**. Nếu hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên D thì $\boxed{f(x) > f(a) \Leftrightarrow x > a}$, $\forall\ x, a \in D$. Nếu hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên D thì $\boxed{f(x) > f(a) \Leftrightarrow x < a}$, $\forall\ x, a \in D$.

✍ **Lưu ý**:

➢ Vận dụng linh hoạt các định lí trên, từ một phương trình ẩn x, ta sẽ đưa hai vế về dạng $f[g(x)] = f[k(x)]$ (chẳng hạn như $f\left(\sqrt{x+5}\right) = f(2x) \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 2x$) với $f(t)$ là một hàm đơn điệu đặc trưng trên miền D đang xét. Thông thường có thể dự đoán được $h(x)$ và **bậc của** $g(x)$, từ đó đồng nhất hệ số để tìm $g(x)$.

➢ Một số phương pháp đồng nhất thường gặp để biến đổi $f[g(x)] = f[k(x)]$:

Dạng 1: $\boxed{x^3 - b = a\sqrt[3]{ax+b}}$ với $a > 0$ (x là ẩn).

$\Leftrightarrow x^3 + ax = ax + b + a\sqrt[3]{ax+b}$

$\Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt[3]{ax+b}\right)$ với hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + at$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{ax+b} \Leftrightarrow x^3 = ax + b$ mà đã biết cách giải.

Dạng 2: $\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = n\sqrt[3]{ex+f}}$.

$\Leftrightarrow m(px+u)^3 + n(px+u) = m(ex+f) + n\sqrt[3]{ex+f}$

Với hàm đặc trưng: $f(t) = mt^3 + nt$ và đồng nhất để tìm các hệ số.

Dạng 3: $\boxed{ax^2 + bx + c = \sqrt{ex+d}}$.

$\Leftrightarrow m(px+u)^2 + n(px+u) = m(ex+d) + n\sqrt{ex+d}$.

Ta sẽ xây dựng hàm đặc trưng dạng $f(t) = mt^2 + nt$.

……………………………

II – CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 117. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}+3.\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}=14 \quad (*)$

Nhận xét: Vế trái của $(*)$ có dạng tổng, nên có nhiều khả năng là hàm đồng biến theo x trên miền xác định. Khi đó, theo định lí 1, phương trình sẽ có nghiệm duy nhất và ta dùng máy tính bỏ túi $(\text{SHIFT}-\text{SOLVE})$ tìm ra nghiệm này là $x=\dfrac{3}{2}$.

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x<2$.
- Xét hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}+3.\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}$ trên khoảng $(-\infty;2)$, ta có:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{6(3-x)}}{2(3-x)^2}+\frac{3\sqrt{2(2-x)}}{(2-x)^2}>0,\ \forall x\in(-\infty;2).$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}+3.\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}=14$ nếu có nghiệm sẽ là nghiệm duy nhất.

- Nhận thấy $f(x)=14=f\left(\dfrac{3}{2}\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.
- Thử lại thấy $x=\dfrac{3}{2}$ thỏa phương trình. Vậy phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{3}{2}$.

Thí dụ 118. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}=4 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{3}\ \wedge\ x\ge -\dfrac{2}{7}\ \wedge\ x+\sqrt{7x+2}\ge 0 \quad (1)$
- Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}$ trên miền của (1).

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}+\left(1+\frac{7}{2\sqrt{7x+2}}\right).\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}}>0,\ \forall x \text{ thỏa } (1).$$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}$ đồng biến $\forall x$ thỏa (1).

- Ta có: $f(x)=4=f(1)\Leftrightarrow x=1$.
- Thử lại thấy $x=1$ thỏa phương trình. Vậy phương trình có một nghiệm $x=1$.

Thí dụ 119. Giải phương trình: $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1 \quad (*)$

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối B, D – Đại học Ngân Hàng khối D năm 2001

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} 4x-1\geq 0 \\ 4x^2-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{1}{4} \\ x\leq -\dfrac{1}{2} \vee x\geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{2}$.

- Nhận thấy $x=\dfrac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình $(*)$.

- Xét hàm số $f(x)=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}$ trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

  $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}+\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}>0,\ \forall x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

  Mà $f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình $(*)$.

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$.

Thí dụ 120. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4\left(2x^2-4x+1\right)$ (1)

Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2001

Bài giải tham khảo

$(1) \Rightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-(x-1)^2}}+\sqrt{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}=2(x-1)^4\left[2(x-1)^2-1\right]$ (2)

- Điều kiện: $1-(x-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\leq 1$.

- Đặt $t=(x-1)^2\geq 0 \Rightarrow t\in[0;1]$. Lúc đó:

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-t}}+\sqrt{1-\sqrt{1-t}}=2t^2(2t-1)$ (3)

- Với $t\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$ thì phương trình (3) có $\begin{cases} VT>0 \\ VP=0 \end{cases} \Rightarrow (3)$ vô nghiệm với $t\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$.

- Với $t\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, bình phương hai vế (3) ta được: $(3) \Leftrightarrow 2+2\sqrt{t}=4t^4(2t-1)^2$

  $\Leftrightarrow \dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}=2t^3(2t-1)^2$ (4) (chia hai vế cho $t\neq 0$).

- Nhận thấy $t=1$ là một nghiệm của (4).

  Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} < 0,\ \forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right] \Rightarrow f(t)$: nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Xét hàm số $g(t) = 2t^3(2t-1)^2$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

$g'(t) = 6t^2(2t-1)^2 + 4t^3(2t-1) > 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right] \Rightarrow f(t)$: đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

- Vậy $t = 1$ là nghiệm duy nhất của $(4) \Rightarrow t = (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.
- Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 0 \vee x = 2$.

Thí dụ 121. Giải phương trình: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

Nhận xét: Đây là dạng 1 cơ bản mà được trình bày trong phần lí thuyết (xem cách biến đổi).

$(*) \Leftrightarrow x^3 + 2x = 2x - 1 + 2\sqrt[3]{2x-1}$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x = \left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 + 2\sqrt[3]{2x-1}$

$\Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt[3]{2x-1}\right) \quad (1)$ và hàm đặc trưng có dạng: $f(t) = t^3 + 2t$.

- Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

  $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \quad (2)$
- Từ $(1),(2) \Rightarrow f(x) = f\left(\sqrt[3]{2x-1}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x-1}$

  $\Leftrightarrow x^3 = 2x + 1$

  $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

✍ **Lưu ý**: Ta có thể giải bài toán bằng cách đặt $y = \sqrt[3]{2x-1}$ để đưa về hệ đối xứng loại II dạng $\begin{cases} y^3 = 2x - 1 \\ x^3 = 2y - 1 \end{cases}$ mà đã trình bày ở phương pháp giải bằng cách đặt ẩn phụ ở trên.

Thí dụ 122. Giải phương trình: $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x-5} \quad (*)$

Nhận xét: Ta cần đưa hai vế phương trình về dạng $f[g(x)] = f[h(x)]$ trong đó hàm đặc trưng có dạng $f(t) = mt^3 + nt$. Ta cần đồng nhất sao cho biểu thức bên vế phải có dạng: $m\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3 + n\sqrt[3]{3x-5}$ và so với vế phải PT nên ta chọn $n = 1$.

Công việc còn lại là tìm những hạng tử ở vế trái sao cho $m\left(px+u\right)^3+\left(px+u\right)=m\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+\sqrt[3]{3x-5}$. Dễ thấy $\left(2x\right)^3=8x^3$ nên $mp^3=8$ có các trường hợp sau xảy ra $\left[\begin{array}{l} m=1,\ p=2 \\ m=8,\ p=1 \end{array}\right.$.

Nếu $m=1,\ p=2$ thì $f\left(t\right)=t^3+t$. Do đó, cần viết phương trình về dạng:

$$m\left(px+u\right)^3+\left(px+u\right)=m\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+\sqrt[3]{3x-5}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x+u\right)^3+\left(2x+u\right)=3x-5+\sqrt[3]{3x-5}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3+\left(12u\right)x^2+\left(6u^2-1\right)x+u^3+u+5=\sqrt[3]{3x-5}$$

Đồng nhất hệ số với vế trái của phương trình, ta được hệ:

$\left\{\begin{array}{l} 12u=-36 \\ 6u^2-1=53 \\ u^3+u+5=-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow u=-3$. Do trường hợp $m=1,\ p=2$ cho kết quả nên ta không xét trường hợp kế tiếp $\left(m=8,\ p=1\right)$. Nên ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$\left(*\right)\Leftrightarrow \left(2x-3\right)^3+\left(2x-3\right)=\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3+\sqrt[3]{3x-5}$$

$\Leftrightarrow f\left(2x-3\right)=f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)\ \left(1\right)$ và có hàm đặc trưng là $f\left(t\right)=t^3+t$.

- Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

  $f'\left(t\right)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow t\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\quad\left(2\right)$

- Từ $\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow f\left(2x-3\right)=f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt[3]{3x-5}$

  $\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0$

  $\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(8x^2-20x+11\right)=0\Leftrightarrow x=2\ \vee\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}$.

<u>Thí dụ 123.</u> Giải phương trình: $x^3-15x^2+78x-141=5\sqrt[3]{2x-9}\qquad\left(*\right)$

<u>Nhận xét</u>: Như các thí dụ trên, ta cần phân tích phương trình $\left(*\right)$ thành dạng $m\left(px+u\right)^3+5\left(px+u\right)=m\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^3+5\sqrt[3]{2x-9}\quad\left(1\right)$ với hàm đặc trưng: $f\left(t\right)=mt^3+5t$.

Do sau khi khai triển $m\left(px+u\right)^3$ có hạng tử $\left(mp^3\right)x^3\sim x^3$ trong $\left(*\right)$ $\Rightarrow mp^3=1$ nên có thể chọn $m=p=1$. Lúc này:

$$\left(1\right) \Leftrightarrow \left(x+u\right)^3 + 5\left(x+u\right) = 2x - 9 + 5\sqrt[3]{2x-9} \quad \left(2\right)$$

Trong khai triễn $\left(x+u\right)^3$ có hạng tử $\left(3u\right)x^2 \sim -15x^2 \Rightarrow u = -5$.

Lúc này: $\left(2\right) \Leftrightarrow \left(x-5\right)^3 + 5\left(x-5\right) = \left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^3 + 5\sqrt[3]{2x-9} \quad \left(3\right)$

Khai triễn $\left(3\right)$ thì được phương trình $\left(*\right)$ nên giá trị $m = p = 1$ là đúng hướng.

Bài giải tham khảo

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \left(x-5\right)^3 + 5\left(x-5\right) = \left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^3 + 5\sqrt[3]{2x-9}$$

$\Leftrightarrow f\left(x-5\right) = f\left(\sqrt[3]{2x-9}\right) \quad \left(1\right)$ với hàm đặc trưng $f\left(t\right) = t^3 + 5t$.

- Xét hàm số $f\left(t\right) = t^3 + 5t$ trên $\mathbb{R}$, có $f'\left(t\right) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\left(2\right)$
- Từ $\left(1\right),\left(2\right) \Rightarrow f\left(x-5\right) = f\left(\sqrt[3]{2x-9}\right) \Leftrightarrow x - 5 = \sqrt[3]{2x-9}$

$\Leftrightarrow x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 2x - 9$

$\Leftrightarrow x^3 - 15x^2 + 73x - 116 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-4\right)\left(x^2 - 11x + 29\right) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \;\vee\; x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Thí dụ 124. Giải phương trình: $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \quad \left(*\right)$

Đề nghị Olympic 30/04/2009

Nhận xét:

Cũng giống như nhận xét trên, ta cần đưa phương trình về dạng:

$$m\left(px+u\right)^3 + \left(px+u\right) = m\left(-x^3 + 9x^2 - 19x + 11\right) + \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

$$\Leftrightarrow \left(mp^3 + m\right)x^3 + \left(3mup^2 - 9m\right)x^2 + \left(3u^2mp + p + 19m\right)x + mu^3 + u - 11m = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

Đồng nhất vế trái với $\left(*\right)$ ta được hệ: $\begin{cases} mp^3 + m = 1 \\ 3mup^2 - 9m = -6 \\ 3u^2mp + p + 19m = 12 \\ mu^3 + u - 11m = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ m = \dfrac{1}{2} \\ u = -1 \end{cases}$.

Bài giải tham khảo

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-1\right)^3 + \left(x-1\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}\right)^3 + \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

$\Leftrightarrow f\left(x-1\right) = f\left(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}\right) \quad \left(1\right)$ và có hàm đặc trưng $f\left(t\right) = \dfrac{1}{2}t^3 + t$.

- Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{1}{2}t^3+t$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

  $f'\left(t\right)=\dfrac{3}{2}t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\quad\left(2\right)$

$\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow f\left(x-1\right)=f\left(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^3=-x^3+9x^2-19x+11=0\Leftrightarrow x=1\ \vee\ x=2\ \vee\ x=3$.

Thí dụ 125. Giải phương trình: $2x^3+x^2-3x+1=2\left(3x-1\right)\sqrt{3x-1}\quad\left(*\right)$

Nhận xét: Thoạt nhìn thì vế trái có bậc 3, vế phải có bậc $\dfrac{3}{2}$ nên khó có thể dùng đơn điệu. Nhưng nếu ở vế phải ta xem $y=\sqrt{3x-1}$ thì vế phải cũng là bậc ba theo y, cũng đồng nghĩa ta phân tích $2\left(3x-1\right)\sqrt{3x-1}=2\left(\sqrt{3x-1}\right)^3$. Phân tích tương tự như các thí dụ trên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x>\dfrac{1}{3}$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow 2x^3+x^2=2\left(\sqrt{3x-1}\right)^3+\left(\sqrt{3x-1}\right)^2$

$\Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)\quad\left(1\right)$ và hàm đặc trưng có dạng: $f\left(t\right)=2t^3+t^2$.

- Xét hàm số $f\left(t\right)=2t^3+t^2$ liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

  $f'\left(t\right)=6t^2+2t>0,\forall t\in\left(0;+\infty\right)\Rightarrow$ Hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)\quad\left(2\right)$

- Từ $\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)\Leftrightarrow x=\sqrt{3x-1}\Leftrightarrow x^2=3x-1\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Thí dụ 126. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+1}>3-\sqrt{x+4}\quad\left(*\right)$

Đại học Bách Khoa Hà Nội năm 1999

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x\geq -1$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}>3\quad\left(**\right)$

- Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}$ trên nửa khoảng $\left[-1;+\infty\right)$.

  $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}>0,\ \forall x\in\left[-1;+\infty\right)\Rightarrow f\left(x\right)$ tăng trên $\left[-1;+\infty\right)$.

Khi $x = 0$ thì $f(x) = 3$.

- Vậy phương trình $\Leftrightarrow f(x) > f(0) = 3 \Leftrightarrow x > 0$.
- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; +\infty)$.

✍ **Lưu ý**: Học sinh có thể giải $(**)$ bằng cách bình phương hai vế, đưa về bất phương trình căn cơ bản $\sqrt{A} > B$, vẫn ra được kết quả như trên nhưng tương đối dài.

Thí dụ 127. Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} \geq 4 \quad (1)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{5}$.
- Xét hàm số: $y = \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$.

$f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} > 0;\ \forall x > \dfrac{1}{5} \Rightarrow f(x)$ là đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$.

- Mặt khác: $f(1) = 4$. Khi đó bất phương trình (1) đã cho $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \geq 1$.
- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in [1; +\infty)$.

Thí dụ 128. Giải bất phương trình: $3\sqrt{3-2x} + \dfrac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \leq 6 \quad (1)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\dfrac{1}{2} < x \leq \dfrac{3}{2}$.
- Bất phương trình: $(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{3-2x} + \dfrac{5}{\sqrt{2x-1}} \leq 2x + 6 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad (*)$
- Xét hàm số: $f(x) = 3\sqrt{3-2x} + \dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}$ liên tục trên nửa khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$.

$f'(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{3-2x}} - \dfrac{5}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3} < 0;\ \forall x \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right] \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$.

- Hàm số $g(x) = 2x + 6$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = g(1) = 8$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nếu } x > 1 \Rightarrow f(x) < g(1) = 8 = g(1) < g(x) \Rightarrow (*) \text{ đúng.} \\ \text{Nếu } x < 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 8 = g(1) > g(x) \Rightarrow (*) \text{ vô nghiệm.} \end{array}\right\} \Rightarrow x > 1$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$.

Thí dụ 129. Giải bất phương trình: $8x^3 + 2x < (x+2)\sqrt{x+1} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge -1$.

$(*) \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x < [(x+1)+1]\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow (2x)^3 + 2x < (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow (2x)^3 + 2x < \left(\sqrt{x+1}\right)^3 + \sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow f(2x) < f\left(\sqrt{x+1}\right) \quad (1)$ với hàm đặc trưng là $f(t) = t^3 + t$.

- Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \quad (2)$

- Từ $(1),(2) \Rightarrow f(2x) < f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{x+1}$ hay $\sqrt{x+1} > 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 2x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x \ge 0 \\ x+1 > 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \le x < 0 \ \vee\ 0 \le x < \frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

$$\Leftrightarrow -1 \le x < \frac{1+\sqrt{17}}{8}.$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[-1; \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$.

Thí dụ 130. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} < 2\sqrt{3} + \sqrt{4-x} \quad (1)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-2 \le x \le 4$.
- Lúc đó: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) < 2\sqrt{3} \quad (2)$
- Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$.

$$f'(x) = \frac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0,\ \forall x \in (-2;4)$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(-2;4)$ và có $f(1) = 2\sqrt{3}$ nên $(2) \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1$.

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x \in [-2;1)$.

Thí dụ 131. Giải bất PT: $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} \le 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$ (1)

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}$.
- Khi đó, phương trình: $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right) \le 4$ (2)
- Với $\sqrt{2x-1}-3 \le 0 \Leftrightarrow x \le 5 \Rightarrow (2)$: luôn đúng.
- Với $x > 5$:

  Xét hàm số: $f(x) = \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$ liên tục trên khoảng $(5;+\infty)$.

  $f'(x) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right) + \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}} > 0;\ \forall x > 5$

  $\Rightarrow f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$ và có $f(7) = 4$.

  Do đó: $(2) \Leftrightarrow f(x) \le f(7) \Leftrightarrow x \le 7$.

- Kết hợp với điều kiên, tập nghiệm bất phương trình là $x \in \left[\dfrac{1}{2};7\right]$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 441. Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x-1} = 5$.

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 442. Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$.

ĐS: $x = 2$.

Bài tập 443. Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{x+7} + \sqrt{x+16} = 14$.

ĐS: $x = 9$.

Bài tập 444. Giải phương trình: $\sqrt[5]{x+1} + \sqrt[5]{x+2} + \sqrt[5]{x+3} = 0$.

ĐS: $x = -2$.

Bài tập 445. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+\sqrt{7x+2}} = 4$.

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 446. Giải phương trình: $\sqrt{5x^3-1} + \sqrt[3]{2x-1} + x = 4$.

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 447. Giải phương trình: $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+3} = 4 - x$.

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 448. Giải phương trình: $\sqrt{5x+1} + 2\sqrt{4-x} + \sqrt{5x+10} = \sqrt{61-4x}$.

ĐS: $x = 1$.

Bài tập 449. Giải phương trình: $2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{5-x} + 3x^2 + 71 = 30x$.

ĐS: $x = 5$.

Bài tập 450. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$.

Đại học khối B năm 2010

ĐS: $x = 5$.

Bài tập 451. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2}$.

ĐS: $x = 1 \vee x = -\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 452. Giải phương trình: $4x^3 + x - \left(x+1\right)\sqrt{2x+1} = 0$

Cao đẳng khối A, A₁, B, D năm 2012

ĐS: $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Bài tập 453. Giải phương trình: $x\left(4x^2+1\right) + \left(x-3\right)\sqrt{5-2x} = 0$.

Đề thi thử Đại học 2013 lần 1 khối A – THPT Tuy Phước

HD: $PT \Leftrightarrow 2x\left(4x^2+1\right) = \left[\left(5-2x\right)+1\right]\sqrt{5-2x} \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{4}$.

Bài tập 454. Giải phương trình: $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$.

Đề nghị Olympic 30/04 – THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bà Rịa Vũng Tàu

ĐS: $x \in \left\{\cos\dfrac{\pi}{9}; \cos\dfrac{5\pi}{9}; \cos\dfrac{7\pi}{9}\right\}$.

Bài tập 455. Giải phương trình: $\left(x+3\right)\sqrt{x+1} + \left(x-3\right)\sqrt{1-x} + 2x = 0$.

ĐS: Dạng $f\left(\sqrt{x+1}\right) = f\left(\sqrt{1-x}\right)$ với hàm đặc trưng $f\left(t\right) = t^3 + t^2 + 2t \Rightarrow x = 0$.

Bài tập 456. Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x$.

Đề nghị Olympic 30 – 04 năm 2009

ĐS: $x = -2 \vee x = 1$.

Bài tập 457. Giải phương trình: $4x^3 + 18x^2 + 27x + 14 = \sqrt[3]{4x+5}$.

ĐS: $x = -1 \vee x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Bài tập 458. Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = \left(3x+2\right)\sqrt{3x+1}$.

ĐS: $x = 0 \vee x = 1$.

Bài tập 459. Giải phương trình: $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2+9x-4}$.

HD: Đặt $y = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$ đưa về hệ, sau đó cộng lại $\Rightarrow x = 5 \vee x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 460. Giải phương trình: $3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) + \left(4x + 2\right)\left(\sqrt{1 + x + x^2} + 1\right) = 0$.

ĐS: $x = -\dfrac{1}{5}$.

Bài tập 461. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x + 4} = x^3 + 3x^2 + x - 2$.

HD: PT $\Leftrightarrow \left(x + 1\right)^3 + x + 1 = 3x + 4 + \sqrt[3]{3x + 4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + 2\cos\dfrac{\pi}{9} \\ x = -1 + 2\cos\dfrac{5\pi}{9} \\ x = -1 + 2\cos\dfrac{7\pi}{9} \end{array}\right.$.

Bài tập 462. Giải phương trình: $\left(2x + 3\right)\sqrt{4x^2 + 12x + 11} + 3x\left(1 + \sqrt{9x^2 + 2}\right) + 5x + 3 = 0$.

ĐS: $x = -\dfrac{3}{5}$ với hàm đặc trưng $f\left(t\right) = t\left(1 + \sqrt{t^2 + 2}\right)$.

Bài tập 463. Giải phương trình: $-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^2}$.

HD: Chia hai vế $x^3 \neq 0$

Biến đổi về dạng : $f\left(t\right) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ với hàm đặc trưng: $f\left(t\right) = t^3 + 2t$.

ĐS: $x = \dfrac{17 \pm \sqrt{97}}{12}$.

Bài tập 464. Giải phương trình: $3x^3 - 6x^2 - 3x - 17 = 3\sqrt[3]{9\left(-3x^2 + 21x + 5\right)}$.

HD: Chia 3 hai vế $\Rightarrow \left(x + 2\right)^3 = 4x^3 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{4} - 1}$.

Bài tập 465. Giải phương trình: $x^3 - 2x^2 + \dfrac{4}{3}x - 2 = \sqrt[3]{81x - 8}$.

HD: $f\left(x - \dfrac{2}{3}\right) = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{81x - 8}{3}}\right) \Leftrightarrow x - \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\dfrac{81x - 8}{3}}$.

Bài tập 466. Giải phương trình: $\sqrt{4x^2 + 1} + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{13}$.

HD: PT $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x + 3}}{1 + \sqrt{1 - x}} - \dfrac{\sqrt{2x + 2}}{1 + \sqrt{2x - 2}} = x - 1$.

Hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{4 - t}}$ đồng biến $\Rightarrow x = 1$.

Bài tập 467. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}>5$.

ĐS: $x\in\left(0;+\infty\right)$.

Bài tập 468. Giải bất phương trình: $2\left(x-2\right)\left(\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}\right)\geq 3x-1$.

HD: $\begin{cases} f\left(x\right)=\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}: \text{ ĐB} \\ g\left(x\right)=\dfrac{3x-1}{2\left(x-2\right)}: \text{ NB} \end{cases} \Rightarrow x\geq 3$.

Bài tập 469. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$.

ĐS: $x\in\left(2;3\right]$.

Bài tập 470. Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}<\sqrt[3]{3x+1}$.

HD: Với $x\leq 1\Rightarrow$ BPT đúng.

Với $x>1$: xét $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x+1}$.

Lưu ý rằng: $f\left(x\right)<f\left(\dfrac{7}{6}\right)=0\Leftrightarrow x<\dfrac{7}{6}\Rightarrow$ ĐS: $x\in\left(-\infty;\dfrac{7}{6}\right)$.

Bài tập 471. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\dfrac{x^2+x}{\left(x^2+x+1\right)\left(2x^2+2x+1\right)}$.

ĐS: $x=0\ \vee\ x=-1$.

Bài tập 472. Giải phương trình: $8x^3+8x-4=\sqrt[3]{4-6x}$.

ĐS: $x=\dfrac{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-5}}{2}$.

Bài tập 473. Giải bất phương trình: $\left(x+2\right)\sqrt{x+1}>27x^3-27x^2+12x-2$.

HD: PT $\Leftrightarrow\left(3x-1\right)^3+3x-1<\left(\sqrt{x+1}\right)^3+\sqrt{x+1}$.

Bài tập 474. Giải phương trình: $x^3+3x^2+5x+3=\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+1}$.

HD: PT $\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(x+1\right)^3+\left(x+1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x=0$.

G – BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

TRONG PHƯƠNG TRÌNH & BẤT PHƯƠNG TRÌNH



I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương pháp giải bài toán có tham số thường ứng dụng kiến thức của tam thức bậc hai (rất ít) hoặc ứng dụng của đạo hàm (phổ biến).

① Ứng dụng tam thức bậc hai

Xét tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c,\ (a \neq 0),\ \Delta = b^2 - 4ac$.

Gọi S, P là tổng và tích của hai nghiệm $x_1,\ x_2$. Hệ thức Viét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

— Điều kiện $f(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

— Điều kiện $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

— Điều kiện $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

— Điều kiện $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

— Khi so sánh hai nghiệm với số $\alpha \neq 0$, ta thường đặt $t = x - \alpha$ để chuyển về so sánh với số 0, cụ thể như sau:

+ $x_2 > x_1 > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > \alpha \\ x_2 > \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \alpha > 0 \\ x_2 - \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2\alpha > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$.

+ $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < \alpha \\ x_2 < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \alpha < 0 \\ x_2 - \alpha < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2\alpha < 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$.

+ $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0$.

— Dấu của $f(x)$:

+ $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$.

+ $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$.

+ $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$.

+ $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$.

② **Ứng dụng của đạo hàm**

Bài toán 1. Tìm m để phương trình $f(x;m)=0$ có nghiệm trên D ?

— Bước 1. Độc lập (tách) m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x)=A(m)$.

— Bước 2. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.

— Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên xác định giá trị của tham số m để đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$.

— Bước 4. Kết luận những giá trị cần tìm của m để phương trình $f(x)=A(m)$ có nghiệm trên D.

Lưu ý:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có GTLN và GTNN trên D thì giá trị m cần tìm là những m thỏa mãn: $\boxed{\min_D f(x)\le A(m)\le \max_D f(x)}$.
- Nếu bài toán yêu cầu tìm tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại k điểm phân biệt.

Bài toán 2. Tìm m để bất phương trình $f(x;m)\ge 0$ hoặc $f(x;m)\le 0$ có nghiệm trên D ?

— Bước 1. Độc lập (tách) m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x)\ge A(m)$ hoặc $f(x)\le A(m)$.

— Bước 2. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.

— Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên xác định giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm:

+ Với bất phương trình $f(x)\ge A(m)$ đó là những m sao cho tồn tại phần đồ thị nằm trên đường thẳng $y=A(m)$, tức là $\boxed{A(m)\le \max_D f(x)}$ $\left(\text{khi } \max_D f(x)\ \exists\right)$.

+ Với bất phương trình $f(x)\le A(m)$ đó là những m sao cho tồn tại phần đồ thị nằm dưới đường thẳng $y=A(m)$, tức là $\boxed{A(m)\ge \min_D f(x)}$ $\left(\text{khi } \min_D f(x)\ \exists\right)$.

Bài toán 3. Tìm tham số m để bất phương trình $f(x)\ge A(m)$ hoặc $f(x)\le A(m)$ nghiệm đúng $\forall x\in D$?

— Bất phương trình $f(x)\ge A(m)$ nghiệm đúng $\boxed{\forall x\in D \Leftrightarrow \min_D f(x)\ge A(m)}$.

— Bất phương trình $f(x)\le A(m)$ nghiệm đúng $\boxed{\forall x\in D \Leftrightarrow \max_D f(x)\le A(m)}$.

Lưu ý:

- Các bài toán liên quan hệ phương trình, hệ bất phương trình $\longrightarrow$ ta cần biến đổi chuyển về các phương trình và bất phương trình.
- Khi đổi biến, cần quan tâm đến điều kiện của biến mới.

II – CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 132. Cho phương trình: $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+x+\sqrt{x-4}=m \quad (*)$ (m là tham số)

1/ Giải phương trình khi $m=6$.

2/ Tìm m để phương trình có nghiệm.

Cao đẳng Hải Quan – Hệ không phân ban năm 1999

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x\geq 4$.

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-4}\right)^2+2.2.\sqrt{x-4}+2^2}+x+\sqrt{x-4}=m$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+x+\sqrt{x-4}=m\Leftrightarrow \sqrt{x-4}+2+x+\sqrt{x-4}=m$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{x-4}\right)^2+2\sqrt{x-4}+1\right]+5=m\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-4}+1\right)^2=m-5 \quad (**)$$

1/ Khi $m=6$ thì $(**)\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-4}+1\right)^2=1\Leftrightarrow \sqrt{x-4}=0\Leftrightarrow x=4$.

2/ Để $(**)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m-5=\left(\sqrt{x-4}+1\right)^2\geq 1\Leftrightarrow m\geq 6$.

Thí dụ 133. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$\sqrt{1-x^2}+2.\sqrt[3]{1-x^2}=a \quad (*)$

Đại học Giao thông vận tải cơ sở II – Tp. Hồ Chí Minh năm 1999

Bài giải tham khảo

- Nhận thấy nếu x_o là nghiệm thì $-x_o$ cũng là nghiệm của phương trình. Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_o=-x_o\Leftrightarrow x_o=0$.
- Thế $x_o=0$ vào $(*)$ ta được: $a=\sqrt{1-0}+2.\sqrt[3]{1-0}\Leftrightarrow a=3$.
- Thử lại:

  Với $a=3$ thì $(*)\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+2.\sqrt[3]{1-x^2}=3 \quad (**)$

  Đặt : $t=\sqrt[6]{1-x^2},\ \left(0\leq t\leq 1\right)\Rightarrow \begin{cases} t^2=\sqrt[3]{1-x^2} \\ t^3=\sqrt{1-x^2} \end{cases}$.

  $(**)\Leftrightarrow t^3+2t^2-3=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow \sqrt[6]{1-x^2}=1\Leftrightarrow 1-x^2=1\Leftrightarrow x=0$ (nghiệm duy nhất).
- Vậy với $a=3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

✍ **Lưu ý**: Có thể giải bài toán trên bằng hai cách khác

- Cách 1. Khảo sát hàm số $f(x)=\sqrt{1-x^2}+2.\sqrt[3]{1-x^2}$ trên khoảng $[0;1]$.

- Cách 2. Đặt hai ẩn phụ $\begin{cases} u = \sqrt{1-x^2} > 0 \\ v = \sqrt[3]{1-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 1-x^2 \\ v^3 = 1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^3 = 0 \\ u + 2v = a \end{cases}$.

Bạn đọc tự giải.

Thí dụ 134. Tìm tham số m để phương trình: $x + \sqrt{3x^2+1} = m$ có nghiệm thực ?

Bài giải tham khảo

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đặt $f(x) = x + \sqrt{3x^2+1},\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Ta có: $f'(x) = 1 + \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}+3x}{\sqrt{3x^2+1}},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3x^2+1}+3x}{\sqrt{3x^2+1}} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+1} = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} -3x > 0 \\ 3x^2+1 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{\dfrac{3}{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Vậy để phương trình có nghiệm thực thì: $m \geq \sqrt{\dfrac{3}{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Thí dụ 135. Tìm tham số m để phương trình: $3x^2 + 2x + 3 = m(x+1)\sqrt{x^2+1}\ \ (*)$ có nghiệm ?

Trích Đề thi thử Đại học năm 2012 đợt 2 – TTBDVH Thăng Long Tp. Hồ Chí Minh

Bài giải tham khảo

$(*) \Leftrightarrow (x^2+2x+1) + 2(x^2+1) = m(x+1)\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + 2(x^2+1) = m(x+1)\sqrt{x^2+1} \quad (1)$

- Vì $x = -1$ không là nghiệm, nên chia hai vế (1) cho $(x+1)\sqrt{x^2+1} \neq 0,$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + 2.\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = m \quad (2)$$

- Đặt $t = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow t' = \frac{1-x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$. Cho $t' = 0 \Rightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	
t	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $t \in \left(-1;\sqrt{2}\right]$.

- Lúc đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(t) = t + \frac{2}{t} = m$ có nghiệm $\forall t \in \left(-1;\sqrt{2}\right],\ t \neq 0$.

- Xét hàm số: $f(t) = t + \frac{2}{t}$ trên nửa khoảng $\left(-1;\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$.

$f'(t) = 1 - \frac{2}{t^2} = \frac{t^2-2}{t^2} \le 0,\ \forall t \in \left(-1;\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	(shaded)		$-$	||	$-$		(shaded)
$f(t)$	(shaded)	-3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	(shaded)

- Dựa vào bảng biến thiên, giá trị m cần tìm là: $m < -3 \ \vee \ m \ge 2\sqrt{2}$.

Thí dụ 136. Tìm tham số m để $(4m-3)\sqrt{x+3} + (3m-4)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0$ có nghiệm thực ?

Olympic 30 – 04 năm 2000

Bài giải tham khảo

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$ hay $x \in \left[-3;1\right]$.

- Nhận thấy: $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{2}\right)^2 = 1$. Giúp ta liên tưởng đến công thức lượng giác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Do đó, ta đặt: $\dfrac{\sqrt{x+3}}{2} = \sin\alpha$ và $\dfrac{\sqrt{1-x}}{2} = \cos\alpha$.

- Do $x \in \left[-3;1\right]$ nên $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Khi đó: $PT \Leftrightarrow 2\left(4m-3\right)\sin\alpha + 2\left(3m-4\right)\cos\alpha + m - 1 = 0, \forall\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \quad (*)$

- Đặt $t = \tan\dfrac{\alpha}{2},\ t \in \left[0;1\right] \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2};\ \cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

- Lúc đó: $(*) \Leftrightarrow \left(4m-3\right)\dfrac{4t}{1+t^2} + \left(3m-4\right)\dfrac{2-2t^2}{1+t^2} + m - 1 = 0,\ \forall t \in \left[0;1\right]$.

$$\Leftrightarrow \frac{-5mt^2 + 16mt + 7m + 7t^2 - 12t - 9}{1+t^2} = 0,\ \forall t \in \left[0;1\right]$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{7t^2 - 12t - 9}{5t^2 - 16t - 7} = g\left(t\right),\ \forall t \in \left[0;1\right]$$

- Tìm $g'\left(t\right) = \dfrac{-52t^2 - 8t - 60}{\left(5t^2 - 16t - 7\right)^2} < 0,\ \forall t \in \left[0;1\right]$.

- Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$g'(t)$	(gạch chéo)		$-$		(gạch chéo)
$g(t)$	(gạch chéo)	$\dfrac{9}{7}$	$\searrow$	$\dfrac{7}{9}$	(gạch chéo)

- Dựa vào bảng biến thiên: Để phương trình có nghiệm thực thì: $\dfrac{7}{9} \leq m \leq \dfrac{9}{7}$.

<u>Thí dụ 137.</u> Cho phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{\left(x+1\right)\left(3-x\right)} = m \quad (*)$ (m là tham số)

1/ Giải phương trình khi $m = 2$.

2/ Tìm m để phương trình có nghiệm.

Đại học sư phạm Vinh khối A – B – E năm 2000

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-1 \le x \le 3$.
- Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = x + 1 + 3 - x + 2\sqrt{(x+1)(3-x)}$.

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)} = \dfrac{t^2 - 4}{2}$.

Ta có: $t^2 = 4 + 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \ge 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} t \le -2 \\ t \ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t \ge 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = -1 \vee x = 3$.

Ta lại có: $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \overset{\text{B.C.S}}{\le} \sqrt{(1^2+1^2)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{3-x}\right)^2\right]} \Leftrightarrow t \le 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow t \in \left[2;\ 2\sqrt{2}\right]$.

$(*) \Leftrightarrow t - \dfrac{t^2-4}{2} = m \Leftrightarrow 2m = -t^2 + 2t + 4$.

1/ Khi $m = 2$ thì $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 0\ (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

2/ Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 4$ trên đoạn $\left[2;\ 2\sqrt{2}\right]$.

$f'(t) = -2t + 2$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	1	2		$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	$-$		
$f(t)$			4	$\searrow$	$4\sqrt{2} - 4$	

- Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm $\min\limits_{[2;\ 2\sqrt{2}]} f(t) \le 2m \le \max\limits_{[2;\ 2\sqrt{2}]} f(t)$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 4 \le 2m \le 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \le m \le 2$.

Thí dụ 138. Tìm tham số thực m để phương trình: $m\sqrt{x^2+2} = x + m \quad (1)$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt ?

Bài giải tham khảo

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Ta có: $(1) \Leftrightarrow m\sqrt{x^2+2} - m = x \Leftrightarrow m = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}-1} = f(x);\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Tính: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+2}-1\right) - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{2-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}};\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} = 2 \Leftrightarrow x^2+2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$.
- Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số có ba nghiệm thực phân biệt thì: $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

<u>Thí dụ 139.</u> Với giá trị nào của a thì bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi giá trị của x:

$(x^2+4x+3)(x^2+4x+6) \ge a \qquad (*)$

Đại học Y Thái Bình năm 2000

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Đặt $t = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1 \ge -1$ và $(*) \Leftrightarrow t(t+3) \ge a$.
- Xét hàm số $f(t) = t(t+3) = t^2 + 3t$ trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$.

  $f'(t) = 2t + 3$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{3}{2}$.

  Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\dfrac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(t)$				-2	$\nearrow$	$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên, để bất phương trình có nghiệm đúng thì $a \le \min\limits_{[-1;+\infty)} f(t) = -2$ hay $a \in (-\infty;-2]$.

Thí dụ 140. Tìm tham số thực m để bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x+5} \ge x^2-4x+m \ (1)$ có nghiệm thực trong đoạn $[2;3]$.

Bài giải tham khảo

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đặt $t = \sqrt{x^2-4x+5} \ge 1 \Rightarrow x^2-4x = t^2-5$.

  Khi đó: $(1) \Leftrightarrow t \ge t^2-5+m \Leftrightarrow m \le -t^2+t+5 = g(t),\ t \in [1;+\infty)$.
- Ta có: $g'(t) = -2t+1$. Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.
- Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2		3	$+\infty$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	$-$		$-$
$g(t)$			3	$\searrow$	-1	

- Dựa vào bảng biến thiên, $m \le -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Thí dụ 141. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m\left(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x}\right) \qquad (*)$$

Học viện công nghệ bưu chính viễn thông năm 1999

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $0 \le x \le 4 \Rightarrow \sqrt{5-x} - \sqrt{4-x} > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right) = \left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)m$$

$$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right) = (5-x-4+x)m$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right) = m \qquad (**)$$

- Xét hàm số $f(x) = \left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)$ trên đoạn $[0;4]$.

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x+12}}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right) + \left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\frac{-1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}\right)$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)\left[\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x+12}} + \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{4-x}}\right] > 0, \forall x \in [0;4].$$

$\Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;4\right] \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[0;4]} f\left(x\right) = f\left(0\right) = 2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-2\right) \\ \max\limits_{[0;4]} f\left(x\right) = f\left(4\right) = 12 \end{cases}$.

- Phương trình $\left(**\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{[0;4]} f\left(x\right) \le m \le \max\limits_{[0;4]} f\left(x\right)$

  $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-2\right) \le m \le 12$.

<u>Thí dụ 142.</u> Giải hệ bất phương trình sau theo tham số m: $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} < 4 \\ x^4 + 4x + m^2 - m + 4 > 0 \end{cases} \quad \left(*\right)$

Đại học Hàng Hải năm 1999

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x \ne 0$.

$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-4x^2}{x^2} < 0 \\ x^4 + 4x + m^2 - m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{1}{2} \ \vee \ x > \dfrac{1}{2} \\ f\left(x\right) = x^4 + 4x + 4 > m - m^2 \end{cases}$.

- Xét hàm số $f\left(x\right) = x^4 + 4x + 4$ trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

  $f'\left(x\right) = 4x^3 + 4$. Cho $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

  Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		(shaded)		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{33}{16}$	(shaded)	$\frac{97}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên, để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m - m^2 < 1 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 > 0$

  $\Leftrightarrow \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0,\ \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \ \forall m \in \mathbb{R}$ thì hệ luôn có nghiệm.

<u>Thí dụ 143.</u> Tìm m để phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{\left(x-1\right)\left(3-x\right)} = m \quad \left(*\right)$ có nghiệm ?

Trung tâm đào tạo bồi dưỡng cán bộ y tế năm 1999

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $1 \le x \le 3$.
- Đặt $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \ge 0$.

  $\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \ge 2 \quad (1)$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x = 1 \vee x = 3$.

  Theo bất đẳng thức Cauchy:

  $\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \overset{\text{Cauchy}}{\le} 2 + x - 1 + 3 - x \Leftrightarrow t^2 \le 4 \quad (2)$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x - 1 = 3 - x \Leftrightarrow x = 2$.

  Từ $(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} 2 \le t^2 \le 4 \\ t \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \le t \le 2$ hay $t \in \left[\sqrt{2};2\right]$.

$(*) \Leftrightarrow -t^2 + 2t + 2 = 2m$.

- Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 2$ trên đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$.

  $f'(t) = -2t + 2$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

  Bảng biến thiên

t	$-\infty$	1	$\sqrt{2}$		2	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0		$-$		
$f(t)$			$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	

- Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm: $2 \le 2m \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 \le m \le \sqrt{2}$.

Thí dụ 144. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm thực phân biệt: $\sqrt{2x^2 + mx - 3} = x + 1 \quad (*)$

Cao đẳng Tài chính Hải quan khối A năm 2006

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ 2x^2 + mx - 3 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ 2x^2 + (m-2)x - 4 = 0 \quad (**) \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (**)$ có hai nghiệm phân biệt thỏa $1 \le x_1 \le x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(-1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 475. Tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình sau có nghiệm:

$$6+x+2\sqrt{(4-x)(2x-2)}=m+4\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-2}\right),(x\in\mathbb{R})\ ?$$

Cao đẳng khối A năm 2011

ĐS: $0\le m\le 1$.

Bài tập 476. Tìm tham số m để phương trình: $x^2+(m+2)x+4=(m-1)\sqrt{x^3+4x}$ có nghiệm ?

ĐS: $m\ge 7$.

Bài tập 477. Tìm tham số m để bất phương trình: $m\sqrt{x^2+1}\le x+2-m$ có nghiệm ?

ĐS: $m\le\dfrac{5}{4}$.

Bài tập 478. Tìm m để phương trình $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt ?

Dự bị 1 Đại học khối D năm 2007

Bài tập 479. Tìm tham số m để bất phương trình: $m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0$ có nghiệm $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$?

ĐS: $m\le\dfrac{2}{3}$.

Bài tập 480. Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}\le m$ có nghiệm đúng $\forall x\in[0;1]$?

ĐS: $m\ge\sqrt{2}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$.

Bài tập 481. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm phân biệt ?

Đại học khối B năm 2006

ĐS: $m\ge\dfrac{9}{2}$.

Bài tập 482. Tìm m để phương trình: $m\sqrt{x^2-2x+2}=x+2$ có hai nghiệm phân biệt ?

Đề thi thử Đại học 2010 lần 1 – THPT Phan Châu Trinh – Đà Nẵng

ĐS: $m\in\left(1;\sqrt{10}\right)$.

Bài tập 483. Tìm m để phương trình: $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm ?

Đại học khối A năm 2007

ĐS: $-1 \le m \le \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 484. Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^2+2x+4}-\sqrt{x+1}=m$ có đúng một nghiệm ?

ĐS: $0 < m \le \sqrt[4]{3}$.

Bài tập 485. Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Đại học khối A năm 2008

ĐS: $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \le m < 6+3\sqrt{2}$.

Bài tập 486. Tìm m để phương trình: $m\sqrt{x^3-1}=x^2+2$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \ge \dfrac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}$.

Bài tập 487. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x-m}+\sqrt{1-x}=3m$ có nghiệm ?

ĐS: $\dfrac{\sqrt{37}-1}{18} \le m \le \dfrac{\sqrt{19}-1}{9}$.

Bài tập 488. Cho phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$ $\left(*\right)$. Xác định tham số m để phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm.

Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1997 – 1998

ĐS: $-\dfrac{9}{4} \le m \le 10$.

Bài tập 489. Tìm m để phương trình: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left[m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+16\sqrt[4]{x\left(x-1\right)}\right]=1$ có hai nghiệm thực phân biệt ?

ĐS: $-16 \le m \le -11$.

Bài tập 490. Cho phương trình $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}=\sqrt{\left(1+x\right)\left(1-8\right)}=m$ $\left(*\right)$. Tìm tham số m để phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm ?

Đại học Kinh Tế Quốc Dân năm 1998 – 1999

ĐS: $3 \le m \le \dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$.

Bài tập 491. Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}-m}-\sqrt{3+2x-x^2} \le 2$ có nghiệm thực ?

ĐS: $2\sqrt{2}-16 \le m \le 2\sqrt{2}$.

Bài tập 492. Tìm m để bất phương trình: $x^2+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3} \ge m$ có nghiệm ?

ĐS: $m \le 1$.

Bài tập 493. Tìm m để bất phương trình: $x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \ge m$ luôn đúng $\forall x > 0$?

ĐS: $m \le \frac{15}{2}$.

Bài tập 494. Tìm m để phương trình: $\left|1 + x\right| + \left(4 - m\right)\left|x - 1\right| = \left(m - 1\right)\sqrt{x^2 - 1}$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left[3; +\infty\right)$.

Bài tập 495. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = m$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left[2; +\infty\right)$.

Bài tập 496. Tìm m để phương trình: $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{2 - x} = m\left(3x + 5\right)$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left[1; \sqrt{2}\right] \setminus \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài tập 497. Tìm m để phương trình: $x\sqrt{x} + \sqrt{x + 12} = m\left(\sqrt{5 - x} + \sqrt{4 - x}\right)$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left[2\sqrt{15} - 4\sqrt{3};\ 12\right]$.

Bài tập 498. Tìm m để phương trình: $m\left(\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2} + 2\right) = \sqrt{1 - x^4} + \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}$ có nghiệm thực ?

Đại học khối B năm 2004

ĐS: $m \in \left(-2\sqrt{5}; \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}\right]$.

Bài tập 499. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{4 - x} = \sqrt{m + 4x - x^2}$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left[5; 6\right]$.

Bài tập 500. Tìm m để phương trình: $2\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = m$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left[3; +\infty\right)$

Bài tập 501. Tìm m để phương trình: $\left(m - 2\right)\left(1 + \sqrt{x^2 + 1}\right) = x^2 - m$ có nghiệm thực ?

Đề thi thử Đại học lần 1 khối D năm 2010 – THPT Phan Châu Trinh – Đà Nẵng

ĐS: $m \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Bài tập 502. Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left(0;1\right]$.

Bài tập 503. Tìm m để phương trình: $\sqrt[5]{x^2 - 34x + m} - \sqrt[4]{\left(x-1\right)\left(x-33\right)} = 1$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left[34;+\infty\right)$.

Bài tập 504. Tìm m để phương trình: $\sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10} = m$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left[\sqrt{2};4\right]$.

Bài tập 505. Tìm m để phương trình: $x^6 + 3x^5 - 6x^4 - mx^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

ĐS: $m \in \left(-\infty;-4\right) \cup \left(21;+\infty\right)$.

Bài tập 506. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x^4 - 4x^3 + 16x + m} + \sqrt[4]{x^4 - 4x^3 + 16x + m} = 6$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

ĐS: $m \in \left(-\infty;27\right)$.

Bài tập 507. Tìm m để phương trình: $2\left(x + \sqrt{4 - x^2}\right) - x\sqrt{4 - x^2} + 2 - 3m = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

ĐS: $m \in \left[\dfrac{2\sqrt{2}+2}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Bài tập 508. Tìm m để phương trình: $2x\sqrt{4 - x^2} - 2\left(m-2\right)\left(x + \sqrt{4 - x^2}\right) + m^2 = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

ĐS: $m \in \left[2\sqrt{3} - 2;2\right)$.

Bài tập 509. Tìm m để phương trình: $10x^2 + 8x + 4 = m\left(2x+1\right)\sqrt{x^2 + 1}$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

ĐS: $m \in \left(-5;-4\right) \cup \left(4;\dfrac{12\sqrt{5}}{5}\right]$.

Bài tập 510. Tìm m để bất phương trình: $mx - \sqrt{x - 3} \le m + 1$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right]$.

Bài tập 511. Tìm m để bất phương trình: $x + 2m \le \sqrt{4x - x^2}$ có nghiệm thực ?

ĐS: $m \in \left(-\infty;\sqrt{2} - 1\right]$.

Bài tập 512. Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{\left(4+x\right)\left(6-x\right)} \le x^2 - 2x + m$ đúng $\forall x \in \left[-4;6\right]$?

ĐS: $m \in \left[-6;+\infty\right)$.

Bài tập 513. Tìm m để bất phương trình: $x\left(4-x\right)+m\left(\sqrt{x^2-4x+5}+2\right)\geq 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \left[2;\ 2+\sqrt{3}\right]$?

ĐS: $m \in \left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Bài tập 514. Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{\left(1+2x\right)\left(3-x\right)} \geq 2x^2-5x-3+m$ đúng $\forall x \in \left[-\dfrac{1}{2};3\right]$?

ĐS: $m \in \left(-\infty;0\right]$.

Bài tập 515. Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2} \geq m-\sqrt{x^2-3x+4}$ đúng $\forall x \in \left[3;+\infty\right)$?

ĐS: $m \in \left(-\infty;2+\sqrt{2}\right]$.

Bài tập 516. Tìm m để bất phương trình: $x^3-2x^2-\left(m-1\right)x+m \geq \dfrac{1}{x}$ đúng $\forall x \in \left[2;+\infty\right)$?

ĐS: $m \in \left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$.

Bài tập 517. Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}+m\sqrt{3x-x^2}-3 \leq 0$ đúng $\forall x \in \left[0;3\right]$?

ĐS: $m \in \left(-\infty;\dfrac{6-2\sqrt{6}}{3}\right]$.

Bài tập 518. Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x^2+4x+8}-\sqrt{x^2-2x+2} > 4m-m^3$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

HSG lớp 12 – Tỉnh Hải Dương năm 2009 – 2010

ĐS: $m \in \left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};-1\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$.

Bài tập 519. Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1-\sqrt{x}} \geq 2-\dfrac{x}{m}$ đúng $\forall x \in \left[0;1\right]$?

ĐS: $m \in \left(-\infty;2+\sqrt{2}\right]$.

Bài tập 520. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2m\sqrt{x\left(1-x\right)}-2\sqrt[4]{x\left(1-x\right)}=m^3$ có nghiệm duy nhất ?

Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự năm 1997 – 1998

ĐS: $m=-1 \vee m=0$.

Bài tập 521. Tìm m sao cho phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $16x^4+mx^3+\left(2m+17\right)x^2-mx+16=0$.

<u>ĐS</u>: $m = 170$.

<u>Bài tập 522.</u> Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m, phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m\left(x-2\right)}$.

Đại học khối B năm 2007

<u>Bài tập 523.</u> Tìm m để phương trình sau có đúng 1 nghiệm: $\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0$.

Dự bị 2 Đại học khối B năm 2007

<u>ĐS</u>: $m = -\dfrac{3}{2} \vee m > 12$.

<u>Bài tập 524.</u> Cho phương trình: $\dfrac{3x^2 - 1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + ax$ (a là tham số). Tìm a để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất ?

Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A đợt III năm 1998

<u>Bài tập 525.</u> Tìm a để phương trình: $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = m$ có nghiệm ?

Đại học Ngoại Thương năm 1999

<u>ĐS</u>: $0 < m \le 2$.

<u>Bài tập 526.</u> Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x} = m$ có nghiệm ?

Đại học Thủy Sản năm 1998

<u>Bài tập 527.</u> Giải và biện luận bất phương trình: $\sqrt{x-m} - \sqrt{x-2m} > \sqrt{x-3m}$ với m là tham số.

Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối D năm 1997

<u>Bài tập 528.</u> Cho bất phương trình: $\left(x^2+1\right)^2 + m \le x\sqrt{x^2+2} + 4$. Tìm m để bất phương trình đã cho được thỏa $\forall x \in \left[0;1\right]$.

Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A – đợt III – Đại học Luật năm 1997

<u>Bài tập 529.</u> Tìm m để phương trình: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{\left(3+x\right)\left(6-x\right)} = m$ có nghiệm ?

Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1997

<u>ĐS</u>: $\dfrac{6\sqrt{2}-9}{2} \le m \le 3$.

<u>Bài tập 530.</u> Tìm $a > 0$ để bất phương trình: $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a$ có nghiệm ?

Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

<u>ĐS</u>: $0 < a < 1$.

<u>Bài tập 531.</u> Xác định m để phương trình: $\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{\left(7-x\right)\left(2+x\right)} = m$ có nghiệm ?

Đại học Ngoại Thương năm 1994

<u>Bài tập 532.</u> Cho bất phương trình: $\sqrt{\left(a+2\right)x - a} \ge \left|x+1\right|$. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình có nghiệm x thỏa $0 \le x \le 2$?

Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh năm 1994

Bài tập 533. Cho bất phương trình: $mx-\sqrt{x-3}\le m+1$. Với giá trị nào của m thì bất phương trình có nghiệm ?

Đại học Ngoại Thương năm 1993 – Đại học Kiến Trúc Tp. Hồ Chí Minh năm 1994

ĐS: $m\le\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Bài tập 534. Cho phương trình: $\sqrt{2x^2+mx}=3-x$ với m là tham số. Xác định m để phương trình có duy nhất một nghiệm ?

Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật Tp. Hồ Chí Minh khối B – V năm 2001

Bài tập 535. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $\sqrt{4-x^2}=mx-m+2$ có nghiệm ?

Đại học Hồng Đức khối A năm 2000

Bài tập 536. Xác định theo m số nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^4+4x+m}+\sqrt[4]{x^4+4x+m}=6$?

Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 2000

Bài tập 537. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$\sqrt{x^2-2x+2}=2m+1-2x^2+4x$?

Cao đẳng Kinh tế đối ngoại khối A – D năm 2006

ĐS: $m\ge-1$.

Bài tập 538. Cho phương trình: $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=m$. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm ?

Đại học Tổng Hợp Tp. Hồ Chí Minh năm 1991 – 1992

ĐS: $m\ge-4$.

Bài tập 539. Xác định tham số m để phương trình: $x^2-6x+m+\sqrt{(x-5)(1-x)}=0$ có nghiệm.

Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Bài tập 540. Cho phương trình: $x^2-\sqrt{4-x^2}+m=0 \quad (*)$. Định m để phương trình $(*)$ có nghiệm.

Cao đẳng Sư Phạm Thể Dục TWII năm 2002

Bài tập 541. Cho phương trình: $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+x+\sqrt{x-4}=m \quad (*)$. Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có nghiệm.

Cao đẳng Hải Quan Tp. Hồ Chí Minh năm 1999

ĐS: $m\ge6$.

Bài tập 542. Tìm m để phương trình: $(2m-1)\sqrt{x+2}+(m-2)\sqrt{2-x}+m-1=0$ có nghiệm ?

HSG lớp 12 – Tỉnh Thái Bình – Năm học 2007 – 2008

HD: Lượng giác hóa.

PHẦN 2 – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Một số ý tưởng giải hệ phương trình:

Không có một công cụ vạn năng nào trong việc xử lý các hệ phương trình. Ta phải căn cứ vào đặc điểm của hệ phương trình để phân tích và tìm tòi ra lời giải. Một số ý tưởng để giải hệ là

① Phương pháp thế, phương pháp cộng.

② Phương pháp đặt ẩn phụ.

③ Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

④ Sử dụng bất đẳng thức.

⑤ Sử dụng số phức và lượng giác.

A – HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Giải hệ bằng phương pháp thế, phương pháp cộng

a/ Hệ có chứa một phương trình bậc nhất

⟶ Phương pháp giải: Rút ẩn bậc nhất theo ẩn thứ hai, rồi thế vào phương trình còn lại.

b/ Hệ phương trình bậc hai có dạng: $\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1y = 0 \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2x + e_2y = 0 \end{cases} \quad (*)$

⟶ Phương pháp giải:

— Kiểm tra xem $y = 0 \Rightarrow x = ...$ có phải là nghiệm không, nếu là nghiệm thì nhận nghiệm này.

— Với $y \neq 0$, đặt $x = ty$ (hoặc $x \neq 0$, đặt $y = tx$). Lúc đó:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1y^2t^2 + b_1y^2 + c_1y^2t + d_1ty + e_1y = 0 \\ a_2y^2t^2 + b_2y^2 + c_2y^2t + d_2ty + e_2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2\left(a_1t^2 + b_1 + c_1t\right) + y\left(d_1t + e_1\right) = 0 \\ y^2\left(a_2t^2 + b_2 + c_2t\right) + y\left(d_1t + e_1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-\left(d_1t + e_1\right)}{\left(a_1t^2 + b_1 + c_1t\right)} \\ y = \dfrac{-\left(d_1t + e_1\right)}{\left(a_2t^2 + b_2 + c_2t\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-\left(d_1t + e_1\right)}{\left(a_1t^2 + b_1 + c_1t\right)} = \frac{-\left(d_1t + e_1\right)}{\left(a_2t^2 + b_2 + c_2t\right)} \Rightarrow t \Rightarrow y \Rightarrow x.$$

c/ Hệ dạng $\begin{cases} f_m\left(x;y\right) = a \\ f_n\left(x;y\right) = f_k\left(x;y\right) \end{cases} \quad (*)$

Trong đó: với $f_m\left(x;y\right),\ f_n\left(x;y\right),\ f_k\left(x;y\right)$ là các biểu thức đẳng cấp bậc $m,\ n,\ k$ thỏa mãn $m + n = k$.

⟶ <u>Phương pháp giải</u>:

Sử dụng kỹ thuật đồng bậc: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f_m(x;y) = a \\ a.f_n(x;y) = a.f_k(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_m(x;y) = a & (1) \\ f_m(x;y).f_n(x;y) = a.f_k(x;y) & (2) \end{cases}$.

Nói một cách khác: kỹ thuật đồng bậc là sự kết hợp giữa hai phương trình (bằng phương pháp thế) để được một phương trình thuần nhất dạng: $a.x^k + bx^n.y^m + c.x^m.y^n + d.y^k = 0$. Sau đó, đưa phương trình này thành phương trình bậc hai hay phương trình tích số hoặc tìm ra mối liên hệ giữa x và y trực tiếp. Kết hợp với phương trình còn lại.

Thí dụ như: $\begin{cases} 4x^4 + y^4 = 4x + y \\ x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 + y^4 = \boxed{1}(4x + y) \\ \qquad\qquad\uparrow \\ \overline{x^3 + y^3 - xy^2} = \boxed{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 + y^4 = (x^3 + y^3 - xy^2)(4x + y) \\ x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \end{cases}$.

2/ <u>Hệ phương trình đối xứng loại I</u>: $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ (I) với $f(x,y) = f(y,x)$ và $g(x,y) = g(y,x)$.

<u>Nhận dạng</u>: Đổi chỗ hai ẩn thì hệ phương trình không thay đổi và trật tự các phương trình cũng không thay đổi.

⟶ <u>Phương pháp giải</u>:

— Biến đổi về tổng – tích và đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ đưa về hệ mới (II) với ẩn $S,\ P$.

— Giải hệ (II) tìm được $S,\ P$ và điều kiện có nghiệm $(x;y)$ là $\underline{\left|S^2 \geq 4P\right.}$.

— Tìm nghiệm $(x;y)$ bằng cách giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$ hoặc nhẩm nghiệm với S, P đơn giản.

✍ ***Một số biến đổi hằng đẳng thức hay dùng trong dạng này để đưa về tổng – tích***:

- $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$.
- $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3SP$.
- $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = S^2 - 4P$.
- $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2$.
- $x^4 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$.

………………………………………………………

3/ <u>Hệ phương trình đối xứng loại II</u>: (I) $\begin{cases} f(x;y) = 0 & (1) \\ f(y;x) = 0 & (2) \end{cases}$

<u>Nhận dạng</u>: Đổi chỗ 2 ẩn thì hệ phương trình không thay đổi và trật tự các phương trình thay đổi.

⟶ <u>Phương pháp giải</u>: Lấy vế trừ vế và phân tích thành nhân tử, lúc nào ta cũng thu được một nhân tử $(x - y)$ tức có $x = y$. Cụ thể các bước như sau:

— Trừ (1) và (2) vế theo vế ta được: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x;y) - f(y;x) = 0 & (3) \\ f(x;y) = 0 & (1) \end{cases}$

— Biến đổi (3) về phương trình tích: $(3) \Leftrightarrow (x-y).g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ g(x,y) = 0 \end{array}\right.$.

— Lúc đó: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ x = y \end{cases} \vee \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$.

— Giải các hệ trên ta tìm được nghiệm của hệ (I).

4/ <u>Hệ phương trình đẳng cấp</u>: $(I)\ \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$.

— Giải hệ khi $x = 0$ (hoặc $y = 0$).

— Khi $x \neq 0$, đặt $y = tx$. Thế vào hệ (I) ta được hệ theo t và x. Khử x ta tìm được phương trình bậc hai theo t. Giải phương trình này ta tìm được t, từ đó tìm được $(x;y)$.

<u>Lưu ý</u>:

Ở trên là hệ đẳng cấp bậc hai, nếu hệ đẳng cấp bậc ba hoặc bốn,… ta cũng giải tương tự.

II – <u>CÁC VÍ DỤ MINH HỌA</u>

<u>Thí dụ 145.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 2xy + 5y = 7 \\ 3x^2 - 2x + y = 3 \end{cases} \quad (*)$

✍ **<u>Nhận xét</u>**: Vì ở phương trình hai của hệ có thể rút y theo theo x, lúc đó thay vào phương trình một, thì phương trình một là bậc ba, nên rất nhiều khả năng giải bằng phương pháp thế. Nên ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2xy + 5y = 7 & (1) \\ y = 3 + 2x - 3x^2 & (2) \end{cases}$

- Thay (2) vào (1) ta được:

$(1) \Leftrightarrow x^3 - 2x(3 + 2x - 3x^2) + 5(3 + 2x - 3x^2) = 7$

$\Leftrightarrow 7x^3 - 19x^2 + 4x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(7x^2 - 12x - 8) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{6 - 2\sqrt{33}}{7} \vee x = \dfrac{6 + 2\sqrt{33}}{7}$.

- Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$.

- Với $x = \dfrac{6 - 2\sqrt{33}}{7} \Rightarrow y = \dfrac{-153 + 44\sqrt{23}}{49}$.
- Với $x = \dfrac{6 + 2\sqrt{33}}{7} \Rightarrow y = \dfrac{-153 - 44\sqrt{23}}{49}$.

Thí dụ 146. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3 + y\left(x+1\right) = 4x^2 & \left(1\right) \\ 5x^4 - 4x^6 = y^2 & \left(2\right) \end{cases}$

✍ **Nhận xét**: Vì phương trình $\left(1\right)$ chứa y bậc nhất nên ta nghĩ đến việc rút y theo x và thế vào phương trình $\left(2\right)$ của hệ. Nhưng lưu ý rằng, khi ta rút y theo x sẽ xuất hiện $\left(x+1\right)$ dưới mẫu số, ta nên xét khi $x = -1 \Rightarrow y = \ldots$ phải là nghiệm của hệ hay không, nếu là nghiệm thì nhận nghiệm này. Xét $x \neq -1$ ta rút y theo x và ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

$\left(1\right) \Leftrightarrow y = \dfrac{4x^2 - 2x^3}{x+1}$ (do $x = -1$ thì $\left(1\right) \Leftrightarrow -1 = 4$ nên $x = -1$ không là nghiệm)

- Thay vào phương trình $\left(2\right)$ ta được:

$$\left(2\right) \Leftrightarrow 5x^4 - 4x^6 = \left(\frac{4x^2 - 2x^3}{x+1}\right)^2 = \frac{4x^4\left(2-x\right)^2}{\left(x+1\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^4\left[\left(5 - 4x^2\right) - \frac{4\left(2-x\right)^2}{\left(x+1\right)^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \left(5 - 4x^2\right)\left(x+1\right)^2 - 4\left(2-x\right)^2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 26x + 11 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \left(x-1\right)\left(2x-1\right)\left(2x^2 + 7x + 11\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = \frac{1}{2}.$$

- Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$.
- Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$.
- Với $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$.

Thí dụ 147. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - \sqrt{y+1} = \dfrac{5}{2} & (1) \\ y + 2(x-3)\sqrt{x+1} = -\dfrac{3}{4} & (2) \end{cases}$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} y \ge -1 \\ x \ge -1 \\ (1) \Rightarrow x \ge \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{5}{2} \\ y \ge -1 \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{y+1} = x - \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow y + 1 = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y = x^2 - 5x + \dfrac{21}{4}$. Thế vào (2), ta được:

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{21}{4} + 2(x-3)\sqrt{x+1} = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 + 2(x-3)\sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) + 2(x-3)\sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[x - 2 + 2\sqrt{x+1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4} \\ x - 2 + 2\sqrt{x+1} = 0 \quad \left(\text{VNdo}: (1) \Rightarrow x \ge \dfrac{5}{2} \text{ nên}: x - 2 + 2\sqrt{x+1} > 0\right) \end{array}\right.$$

- Vậy nghiệm hệ là $(x;y) = \left(3; -\dfrac{3}{4}\right)$.

Thí dụ 148. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 + 22x - 39y = 0 & (1) \\ 35x^2 + 28y^2 + 111x - 10y = 0 \end{cases} \quad (*)$

✍ **Nhận xét**: Đây là hệ bậc hai dạng $\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1y = 0 \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2x + e_2y = 0 \end{cases}$ (xem lại phương pháp giải ở phần lí thuyết).

Bài giải tham khảo

- Với $x = 0,\ y = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ nên $(x;y) = (0;0)$ là nghiệm của $(*)$.
- Với $x \ne 0$: đặt $x = ty$ thì

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 14x^2 - 21t^2x^2 + 22x - 39tx = 0 \\ 35x^2 + 28t^2x^2 + 111x - 10tx = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(14-21t^2\right)x^2=\left(39t-22\right)x \\ \left(35+28t^2\right)x^2=\left(10t-111\right)x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{39t-22}{14-21t^2} \quad \left(2\right) \\ x=\dfrac{10t-111}{35+28t^2} \end{cases}, \ \left(\text{do}: x\neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{39t-22}{14-21t^2}=\frac{10t-111}{35+28t^2}$$

$$\Leftrightarrow 186t^3-421t^2+175t+112=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}.$$

- Thay $t=-\dfrac{1}{3}$ vào $\left(2\right)\Rightarrow x=\dfrac{39t-22}{14-21t^2}=-3$.
- Thay $x=-3$ vào $\left(1\right)\Rightarrow y=1$.
- Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;y\right)=\left\{\left(0;0\right),\left(-3;1\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 149.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases} \quad \left(*\right)$

<u>Nhận xét</u>: Thấy rằng vế trái của phương trình thứ hai là bậc ba, còn vế phải là bậc không. Nếu ta sử dụng kỹ thuật đồng bậc, tức là thế phương trình một vào hai: $\left(*\right)\Leftrightarrow \begin{cases} 1=\boxed{x^3+y^3} \\ \quad\quad\downarrow \\ x^2y+2xy^2+y^3=2.1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2y+2xy^2+y^3=2.\left(x^3+y^3\right)$

thì đây là phương trình thuần nhất cùng bậc ba và sau đó, ta chia hai vế cho $y^3\neq 0$ (vì $y=0$ không là nghiệm) thì được phương trình bậc ba với ẩn là $\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Nên ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$\left(*\right)\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2\left(x^3+y^3\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2-y^3-2x^3=0 \end{cases} \quad \left(1\right)$$

- Do $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên chia hai vế phương trình hai của hệ $\left(1\right)$ cho $y^3\neq 0$:

$$\left(1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3=1\\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2.\left(\dfrac{x}{y}\right)-1-2\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3=1\\ 2\left(\dfrac{x}{y}\right)^3-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-2.\left(\dfrac{x}{y}\right)+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3=1\\ \dfrac{x}{y}=1\ \vee\ \dfrac{x}{y}=-1\ \vee\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}\\ y=\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}\end{cases}.$$

- Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;y\right)=\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right),\left(\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3};\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)\right\}$.

Thí dụ 150. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2=2 & \left(1\right)\\ \left(x+y\right)\left(4-x^2y^2-2xy\right)=2y^5 & \left(2\right)\end{cases}$

Nhận xét: Phương trình thứ hai có $\left(x+y\right)$ bậc nhất, $\left(4-x^2y^2-2xy\right)$ có bậc bốn nhưng các hạng tử chưa đồng bậc. Vì vậy, ta nghĩ đến phép thế của phương trình đầu để tạo biểu thức thuần nhất, đồng bậc. Ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Thay $\left(1\right)$ vào $\left(2\right)$ ta được:

$$\left(2\right)\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left[\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2-\left(x^2+y^2\right)xy\right]=2y^5$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left[x^4+y^4+x^2y^2-xy\left(x^2+y^2\right)\right]=2y^5$$

$$\Leftrightarrow x^5+y^5=2y^5\Leftrightarrow x^5=y^5\Leftrightarrow x=y.$$

- Thay $x=y$ vào phương trình $\left(1\right)$ ta được: $\begin{cases}x=y\\ 2x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\pm1$.
- Vậy nghiệm của hệ là $\left(x;y\right)=\left\{\left(1;1\right),\left(-1;-1\right)\right\}$.

Thí dụ 151. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-8x=y^3+2y\\ x^2-3y^2=6\end{cases}\quad\left(*\right)$

Đề thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh năm 2008 – Dự bị 2 Đại học khối A năm 2006

Nhận xét: Hệ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x + y) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$. Ta nghĩ đến việc đồng bậc của phương trình thứ nhất bằng cách dùng phép thế từ phương trình thứ hai trong hệ. Nhưng trước hết ta cần nhân thêm cho 3 hai vế của phương trình một để xuất hiện số 6. Ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x + y) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^3 - y^3) = 6(4x + y) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^3 - y^3) = (x^2 - 3y^2)(4x + y) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2y - 12xy^2 = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 3y)(x + 4y) = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \vee \ x = 3y \ \vee \ x = -4y \\ x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}.$$

- Với $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$: vô nghiệm.

- Với $x = 3y \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$.

- Với $x = -4y \Rightarrow \begin{cases} x = -4y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y \\ y^2 = \dfrac{6}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ y = \sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ y = -\sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{cases}$.

- Vậy tập nghiệm của hệ là $(x;y) = \left\{(3;1), (-3;-1), \left(-4\sqrt{\dfrac{6}{13}}; \sqrt{\dfrac{6}{13}}\right), \left(4\sqrt{\dfrac{6}{13}}; -\sqrt{\dfrac{6}{13}}\right)\right\}$.

Thí dụ 152. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^2 - 3y = x - 3xy \\ x^3 - x^2 = y^2 - 3y^3 \end{cases} \quad (*)$

Đề thi thử Đại học 2013 lần 1 khối A – THPT Chuyên Hà Nội – AMSTERDAM

Bài giải tham khảo

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 3xy = x + 3y & \left(1\right) \\ x^3 + 3y^3 = x^2 + y^2 & \left(2\right) \end{cases}$$

- Trường hợp 1. $x + 3y = 0 \Leftrightarrow x = -3y \Rightarrow x = y = 0$.
- Trường hợp 2. $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ và thỏa mãn hệ.
- Trường hợp 3. $\begin{cases} x + 3y \neq 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$: lấy $\left(1\right)$ chia $\left(2\right)$ ta được:

$$\frac{\left(1\right)}{\left(2\right)} \Leftrightarrow \frac{5x^2 + 3xy}{x^3 + 3y^3} = \frac{x + 3y}{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(5x^2 + 3xy\right)\left(x^2 + y^2\right) = \left(x^3 + 3y^3\right)\left(x + 3y\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + 5x^2y^2 - 9y^4 = 0 \quad \left(3\right)$$

Do : $y = 0$ không là nghiệm của $\left(3\right)$ nên chia hai vế của $\left(3\right)$ cho $y^4 \neq 0$ ta được:

$$\left(3\right) \Leftrightarrow 4\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2 + 5\left(\frac{x^2}{y^2}\right) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = 1 \vee \frac{x^2}{y^2} = -\frac{9}{4} \quad \left(L\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$$

- Với $x = y \Rightarrow \begin{cases} 8x^2 = 4x \\ 4x^3 = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$.
- Với $x = -y \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = -2x \\ -2x^3 = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.
- Vậy hệ phương trình có ba nghiệm: $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(0;0\right), \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \left(-1;1\right)\right\}$.

Thí dụ 153. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} + y = 18 & \left(1\right) \\ \sqrt{x^2 + x + y + 1} - x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} - y = 2 & \left(2\right) \end{cases}$

Đại học An Ninh Hà Nội khối A năm 1999

Bài giải tham khảo

- Hệ $\overset{(1)+(2)}{\underset{(1)-(2)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 2\left(\sqrt{x^2 + x + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + y + 1}\right) = 20 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1}=10 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{y^2+9}=10-\sqrt{x^2+9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ 10-\sqrt{x^2+9}\ge 0 \\ y^2+9=100-20\sqrt{x^2+9}+x^2+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ 10\ge \sqrt{x^2+9} \\ \left(8-x\right)^2=100-20\sqrt{x^2+9}+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ 100\ge x^2+9 \\ 5\sqrt{x^2+9}=4x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ -\sqrt{91}\le x\le \sqrt{91} \\ 25\left(x^2+9\right)=16x^2+72x+81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ -\sqrt{91}\le x\le \sqrt{91} \\ 9x^2-72x+144=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}.$$

- Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(4;4\right)$.

<u>Thí dụ 154.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x}=2 \\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y}=6 \end{cases} \quad \left(*\right)$

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 400 tháng 10 năm 2010

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ y+3x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}>0 \\ y+3x\ne 0 \end{cases}$.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}} & \left(1\right) \\ 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}} & \left(2\right) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\underset{(1)-(2)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 1=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}} & \left(3\right) \\ -\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{y}} & \left(4\right) \end{cases}$$

- Lấy $\left(3\right)x\left(4\right)\Rightarrow -\dfrac{12}{y+3x}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{y}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}\right)\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-\dfrac{9}{y}=-\dfrac{12}{y+3x}$

$$\Leftrightarrow \frac{y-9x}{xy}+\frac{12}{y+3x}=0\Leftrightarrow \left(y-9x\right)\left(y+3x\right)+12xy=0\Leftrightarrow y^2+6xy-27x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2+6\left(\frac{y}{x}\right)-27=0\Leftrightarrow \frac{y}{x}=3\vee \frac{y}{x}=-9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=-9x\ \left(L\right) \end{array}\right.\Leftrightarrow y=3x \quad \left(5\right)$$

- Từ $\left(1\right),\left(5\right)\Rightarrow x=\left(1+\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow y=3\left(1+\sqrt{3}\right)^2$.

Thí dụ 155. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad (*)$

Cao đẳng Giao thông vận tải III năm 2004

Nhận xét: Thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi $\Rightarrow$ là hệ đối xứng loại I $\xrightarrow{\text{PP}}$ Biến đổi về tổng và tích. Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \neq 0;\ y \neq 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = -\dfrac{1}{2} \\ (x+y)^2 - 2xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{S}{P} = -\dfrac{1}{2} \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases},\ (S^2 \geq 4P).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = -2S,\ (P \neq 0) \\ S^2 + 4S - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases} (N) \vee \begin{cases} S = -5 \\ P = 10 \end{cases} (L)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

- Vậy nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{(-1;2),(2;-1)\right\}$.

Thí dụ 156. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases} \quad (*)$

Đại học Sư phạm Hà Nội khối B – T – M năm 2001

Nhận xét: Thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi $\Rightarrow$ hệ đối xứng loại I. $\xrightarrow{\text{PP}}$ Biến đổi về tổng và tích. Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = 8 \\ (x+y) + 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] = 8 \\ (x+y) + 2xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 8 \\ (x+y) + 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3PS = 8 \\ S + 2P = 2 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases} \left(\text{ĐK}: S^2 \geq 4P\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{2-S}{2} \\ S^3 - 3S.\dfrac{2-S}{2} - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{2-S}{2} \\ 2S^3 + 3S^2 - 6S - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$

- Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $S = (x;y) = \left\{(2;0),(0;2)\right\}$.

Thí dụ 157. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3(x+y) + 2xy + 9 = 0 \end{cases} \quad (*)$

Cao đẳng Giao Thông Vận Tải III khối A năm 2006

Nhận xét: Thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi $\Rightarrow$ hệ đối xứng loại I.
$\xrightarrow{PP}$ Biến đổi về tổng và tích. Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Đặt $S = x + y,\ \ P = xy$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 13 \\ 3(x+y) + 2xy + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 13 \\ 3S + 2P + 9 = 0 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2P = -3S - 9 \\ S^2 + 3S - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \end{cases} \vee \begin{cases} S = -4 \\ P = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

- Với $\begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}.$

- Với $\begin{cases} S = -4 \\ P = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -4 \\ xy = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-4 - \sqrt{10}}{2} \\ y = \dfrac{-4 + \sqrt{10}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-4 + \sqrt{10}}{2} \\ y = \dfrac{-4 - \sqrt{10}}{2} \end{cases}.$

- Vậy nghiệm hệ là $S = (x;y) = \left\{(-2;3),(3;-2),\left(\dfrac{-4 \pm \sqrt{10}}{2};\dfrac{-4 \mp \sqrt{10}}{2}\right)\right\}.$

Thí dụ 158. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 91 \end{cases} \quad (*)$

Cao đẳng sư phạm Hưng Yên khối B năm 2006

Nhận xét: Thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi $\Rightarrow$ hệ đối xứng loại I.
$\xrightarrow{PP}$ Biến đổi về tổng và tích. Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 13 \\ (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 13 + xy \\ \left[(x+y)^2 - 2xy\right]^2 - (xy)^2 = 91 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 13 \\ (13 - xy)^2 - (xy)^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ (x+y)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \ \vee \ x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right. .$$

- Vậy nghiệm của hệ là $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(-3;-1\right),\left(-1;-3\right),\left(1;3\right),\left(3;1\right)\right\}$.

✍ **Lưu ý**: Ta có thể sử dụng hằng đẳng thức: $x^4+y^4+x^2y^2=\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$ để giải (Dành cho bạn đọc).

Thí dụ 159. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6 \\ x^2y+y^2x=20 \end{cases} \quad (*)$

Cao đẳng bán công Hoa Sen khối A năm 2006 (Đại học Hoa Sen)

Nhận xét: Thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi $\Rightarrow$ hệ đối xứng loại I.

$\xrightarrow{PP}$ Biến đổi về tổng và tích. Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x,\ y\ge 0$. Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x}\ge 0 \\ v=\sqrt{y}\ge 0 \end{cases}$.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow \begin{cases} u^2v+uv^2=6 \\ u^4v^2+u^2v^4=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv\left(u+v\right)=6 \\ u^2v^2\left(u^2+v^2\right)-20=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv\left(u+v\right)=6 \\ \left(uv\right)^2\left[\left(u+v\right)^2-2uv\right]=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PS=6 \\ P^2\left(S^2-2P\right)=20 \end{cases} \text{với} \begin{cases} S=u+v \\ P=uv \end{cases},\ \left(S^2\ge 4P\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv\left(u+v\right)=6 \\ \left(uv\right)^2\left[\left(u+v\right)^2-2uv\right]=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PS=6 \\ P^2\left(S^2-2P\right)=20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} PS=6 \\ \left(PS\right)^2-2P^3=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=2 \\ S=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=2 \\ u+v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \vee \begin{cases} v=2 \\ u=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}.$$

- Vậy nghiệm của hệ là $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(1;4\right),\left(4;1\right)\right\}$.

Thí dụ 160. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+1=2y & (1) \\ y^3+1=2x & (2) \end{cases}$

Đại học Thái Nguyên khối A – B – T năm 2001

Nhận xét: Thay đổi vị trí x và y cho nhau thì phương trình (1) trở thành phương trình (2) và hệ không thay đổi $\Rightarrow$ hệ đối xứng loại II. $\xrightarrow{PP}$ Lấy vế trừ theo vế. Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

$$(1)-(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=2(y-x) \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2+xy)+2(x-y)=0 \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2+xy+2)=0 \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ \left(x^2+xy+\dfrac{y^2}{4}\right)+\dfrac{3}{4}y^2+2=0 \end{array}\right. \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ \left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2+2=0\ (VN) \end{array}\right. \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^3-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

- Vậy nghiệm hệ là: $S=(x;y)=\left\{(1;1),\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Thí dụ 161. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=\dfrac{3}{x^2} \\ 2y+x=\dfrac{3}{y^2} \end{cases}\quad (*)$

Đại học Thủy Lợi năm 2001

Nhận xét: Thay đổi vị trí x và y cho nhau thì phương trình (1) trở thành phương trình (2) và hệ không thay đổi $\Rightarrow$ hệ đối xứng loại II. $\xrightarrow{PP}$ Lấy vế trừ theo vế. Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x\neq 0,\ y\neq 0$.

$$(*)\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+x^2y=3 & (1) \\ 2y^3+xy^2=3 & (2) \end{cases}$$

Cách giải 1. ***(Xem đây là hệ phương trình đối xứng loại 2)***

$$(1)-(2)\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^3-y^3)+xy(x-y)=0 \\ 2x^3+x^2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)=0 \\ 2x^3+x^2y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(2x^2+2y^2+3xy)=0 \\ 2x^3+x^2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ 2x^2+2y^2+3xy=0 \end{array}\right. \\ 2x^3+x^2y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ 2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}y\right)^2+\dfrac{7}{16}y^2\right]=\ 0\ \left(\text{VN do}: xy\neq 0\right) \end{array}\right. \\ 2x^3+x^2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3x^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$$

- Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Cách giải 2. ***(Xem đây là hệ phương trình đẳng cấp bậc ba)***

- Với $x,\ y\neq 0$, đặt $x=ty\neq 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^3y^3+t^2y^3=3 \\ 2y^3t^3+ty^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3(2t^3+t^2)=3 \\ y^3(2t^3+t)=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^3+t^2}{2t^3+t}=1 \Leftrightarrow 2t^3+t^2=2t^3+t \Leftrightarrow t^2-t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=0\ (L) \end{array}\right..$$

- Với $t=1\Leftrightarrow x=y$ thay vào (1) ta được $\begin{cases} 3x^3=3 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Thí dụ 162. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 & (1) \\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4 & (2) \end{cases}$

Nhận xét: Thay đổi vị trí x và y cho nhau thì phương trình (1) trở thành phương trình (2) và hệ không thay đổi $\Rightarrow$ hệ đối xứng loại II. $\xrightarrow{\text{PP}}$ Lấy vế trừ theo vế. Nên ta có lời giải sau:

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} -\dfrac{3}{2}\leq x\leq 4 \\ -\dfrac{3}{2}\leq x\leq 4 \end{cases}.$

$$(1)-(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 \\ \left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2y+3}\right)+\left(\sqrt{4-y}-\sqrt{4-x}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 \\ \dfrac{2(x-y)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}}+\dfrac{x-y}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4-y}}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 \\ \left(x-y\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4-y}}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 \\ x-y=0 \end{cases} \left(\text{do}: \dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4-y}}>0\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}=4 \\ x=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+7+2\sqrt{\left(2x+3\right)\left(4-x\right)}=16 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=3 \\ x=y=\dfrac{11}{9} \end{array}\right.\cdot$$

- So với điều kiện, hệ có hai nghiệm: $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(3;3\right),\left(\dfrac{11}{9};\dfrac{11}{9}\right)\right\}$.

✍ **Nhận xét**: Qua bài toán trên, ta nhận thấy, đối với hệ đối xứng loại II có chứa căn thức, sau khi lấy vế trừ vế, ta cần phải khử căn thức bằng cách nhân lượng liên hợp hoặc sử dụng tính đơn điệu của hàm số hoặc bình phương,… để xuất hiện nhân tử chung $\left(x-y\right)$.

Thí dụ 163. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x=y^3-3y \\ x^6+y^6=1 \end{cases} \left(*\right)$

Đại học Ngoại Thương khối A năm 2001 – HSG lớp 12 Tỉnh Thái Bình năm 2003 – 2004

Bài giải tham khảo

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-y\right)\left(x^2+y^2+xy-3\right)=0 \\ x^6+y^6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x=y \\ x^6+y^6=1 \end{cases} & \left(\text{I}\right) \\ \begin{cases} x^2+y^2+xy-3=0 \\ x^6+y^6=1 \end{cases} & \left(\text{II}\right) \end{array}\right.$$

- Giải $\left(\text{I}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^6+y^6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x^6=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

- Giải $\left(\text{II}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+xy=3 & \left(1\right) \\ x^6+y^6=1 & \left(2\right) \end{cases}$

$\left(1\right) \Rightarrow x^2+y^2=3-xy$.

$\left(2\right) \Rightarrow \begin{cases} \left|x\right|\le 1 \\ \left|y\right|\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\le 1 \\ y^2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2\le 2 \\ x^2y^2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-xy\le 2 \\ xy\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy\ge 1 \\ xy\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Thay $x=y=1$ vào $\left(2\right) \Rightarrow 1+1=1$ vô lí $\Rightarrow$ Loại $x=y=1$.

- Vậy hệ có hai nghiệm là $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}};-\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}};\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 164.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x-y\right)^2 y = 2\\ x^3 - y^3 = 19\end{cases} \quad \left(*\right)$

Đại học Nông Nghiệp I khối A năm 2001

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Do $y = 0 : \left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases}0 = 2\\ x^2 = 19\end{cases} \left(\text{VN}\right) \Rightarrow y = 0$ không là nghiệm hệ. Đặt $x = ty$:

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\left(ty-y\right)^2 y = 2\\ t^2y^3 - y^3 = 19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^3\left(t-1\right) = 2\\ y^3\left(t^2-1\right) = 19\end{cases} \Leftrightarrow \frac{t-1}{t^2-1} = \frac{2}{19} \Leftrightarrow 2t^2 - 17t + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 7\\ t = \frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x = 7y\\ \left(x-y\right)^2 y = 2\end{cases} \vee \begin{cases}x = \frac{3}{2}y\\ \left(x-y\right)^2 y = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{7}{\sqrt[3]{18}}\\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{18}}\end{cases} \vee \begin{cases}x = 3\\ y = 2\end{cases}.$$

- Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(3;2\right),\left(\frac{7}{\sqrt[3]{18}};\frac{1}{\sqrt[3]{18}}\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 165.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 & \left(1\right)\\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0 & \left(2\right)\end{cases} \quad \left(*\right)$

Học Viện Ngân Hàng – Phân Viện Ngân Hàng Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2001

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Với $\begin{cases}x = 0\\ y = 0\end{cases} : \left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases}0 = 9\\ 0 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = 0\end{cases}$ không là nghiệm của hệ $\left(*\right)$.

- Với $x \ne 0;\ y \ne 0$, đặt $y = tx$. Từ $\left(2\right) \Leftrightarrow 2x^2 - 13x^2t + 15t^2x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2\left(2 - 13t + 15t^2\right) = 0 \Leftrightarrow 15t^2 - 13t + 2 = 0 \ \left(\text{do} : x \ne 0\right) \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \vee t = \frac{1}{5}.$$

- Với $t = \frac{2}{3} : \left(1\right) \Leftrightarrow x^2\left(1 - 2t + 3t^2\right) = 9 \Leftrightarrow x^2\left(1 - \frac{4}{3} + \frac{12}{9}\right) = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -3 \Rightarrow y = -2\\ x = 3 \Rightarrow y = 2\end{array}\right..$$

- Với $t = \frac{1}{5} : \left(1\right) \Leftrightarrow x^2\left(1 - 2t + 3t^2\right) = 9 \Leftrightarrow x^2\left(1 - \frac{2}{5} + \frac{3}{25}\right) = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{2}$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ \vee \ x = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Vậy nghiệm của hệ là: $S=(x;y)=\left\{(-3;-2),(3;2),\left(-\frac{5}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{5}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 166.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+2xy+3y^2=9 & (1)\\ 2x^2+2xy+y^2=2 & (2)\end{cases}$

Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối A – B năm 2000

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$\frac{(1)}{(2)}\Leftrightarrow\frac{x^2+2xy+3y^2}{2x^2+2xy+y^2}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2\left(x^2+2xy+3y^2\right)=9\left(2x^2+2xy+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 16x^2+14xy+3y^2=0 \quad (*)$$

- Do $y=0$ không thỏa mãn hệ nên chia hai vế $(*)$ cho $y^2\neq 0$, ta được:

$$(*)\Leftrightarrow 16\left(\frac{x}{y}\right)^2+14\left(\frac{x}{y}\right)+3=0\Leftrightarrow\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}\ \vee\ \frac{x}{y}=-\frac{3}{8}\Leftrightarrow y=-2x\ \vee\ y=-\frac{8}{3}x.$$

- Với $y=-2x\Rightarrow\begin{cases}y=-2x\\2x^2+2xy+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x\\x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$.

- Với $y=\frac{-8x}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{-8x}{3}\\2x^2+2xy+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{-8x}{3}\\x^2=\frac{9}{17}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3\sqrt{17}}{17}\\y=\frac{-8\sqrt{17}}{17}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{-3\sqrt{17}}{17}\\y=\frac{8\sqrt{17}}{17}\end{cases}$.

- Vậy nghiệm hệ là: $S=(x;y)=\left\{(1;-2),(-1;2),\left(\frac{3\sqrt{17}}{17};-\frac{8\sqrt{17}}{17}\right),\left(-\frac{3\sqrt{17}}{17};\frac{8\sqrt{17}}{17}\right)\right\}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

<u>Bài tập 543.</u> Giải các hệ phương trình sau

1/ $\begin{cases}x^3+y^3=2\\xy(x+y)=2\end{cases}$. <u>ĐS</u>: $(x;y)=(1;1)$.

2/ $\begin{cases}xy(x-y)=-2\\x^3-y^3=2\end{cases}$. <u>ĐS</u>: $(x;y)=\{(1;-1),(-1;1)\}$.

3/ $\begin{cases}x^2+y^2=8-x-y\\xy(xy+x+y+1)=12\end{cases}$. <u>ĐS</u>: $(1;2),(1;-3),(-2;2),(-2;-3)$.

4/ $\begin{cases}3x^2+5xy-4y^2=38\\5x^2-9xy-3y^2=15\end{cases}$. <u>ĐS</u>: $(x;y)=\{(-3;-1),(3;1)\}$.

5/ $\begin{cases}14x^2 - 21y^2 - 6x + 45y - 14 = 0\\ 35x^2 + 28y^2 + 41x - 122y + 56 = 0\end{cases}$. ĐS: $(x;y) = \{(1;2),(-2;3)\}$.

6/ $\begin{cases}x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y)\\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x)\end{cases}$. ĐS: $(x;y) = \left\{(1;1),\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

7/ $\begin{cases}3x^2 + 2xy + y^2 = 11\\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17\end{cases}$. ĐS: $(x;y) = \left\{\left(\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}};\mp\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right),(\pm1;\pm2)\right\}$.

Bài tập 544. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x + y} = y\\ \sqrt{x + y} = x - y + 1\end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \left(1;\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$.

Bài tập 545. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^2 - 3xy = 4\\ x^2 - 4xy + y^2 = 1\end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \{(1;4),(-1;-4)\}$.

Bài tập 546. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y^2 - x^2 = 1\\ 2x^3 - y^3 = 2y - x\end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = (\pm1;\pm1)$.

Bài tập 547. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3 + y^3 = 1\\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2\end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right),\left(\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3};\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)\right\}$.

Bài tập 548. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3 + 3x = 448y^3 + 6y\\ 385x^2 - 16y^2 = 96\end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{8}\right),\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{8}\right)\right\}$.

Bài tập 549. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3 + y^3 = 1\\ x^5 + y^5 = x^2 + y^2\end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \{(0;1),(1;0)\}$.

Bài tập 550. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^3 - y^3 = \dfrac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Bài tập 551. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 4y - y^3 - 16x = 0 \\ y^2 = 5x^2 + 4 \end{cases}$.

Bài tập 552. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 1 & (2) \end{cases}$.

HD: $(1) - 2.(2) \Rightarrow (x;y) = \left\{(0;1),(1;1),(0;-1),(-1;-1),\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$.

Bài tập 553. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = x - 4y & (2) \end{cases}$.

HD: $(1) - 3.(2) \Rightarrow (x-1)^3 = (y+2)^3 \Rightarrow (x;y) = \{(1;-2),(2;-1)\}$.

Bài tập 554. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y + xy^2 + x - 5y = 0 & (1) \\ 2xy + y^2 - 5y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$.

HD: $x.(2) - (1) \Leftrightarrow x^2y - 5xy + 5y = 0 \Rightarrow x = 5 + \sqrt{5} \ \vee \ x = 5 - \sqrt{5}$.

Bài tập 555. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2y + x = 2 & (1) \\ 2x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$.

HD: $(2) \Rightarrow x^2 = \dfrac{y^2 + 2y + 2}{2}$ thay vào (1) và rút gọn, ta được: $x = \dfrac{3y^2 + 6y - 2}{2(y+1)}$ và thay vào $(2) \Rightarrow (x;y) = \left\{(-1;-2),(1;0),\left(-\dfrac{4}{\sqrt{7}};\dfrac{5-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right),\left(\dfrac{4}{\sqrt{7}};\dfrac{-5-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)\right\}$.

Bài tập 556. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{y}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+3}\right) = 3 & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = x + 1 & (2) \end{cases}$.

HD: Nhân liên hợp $(1) \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+3}$ và kết hợp $(2) \Rightarrow (x;y) = (1;1)$.

Bài tập 557. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2 - xy - 2y^2 = 56 \\ 5x^2 - xy - y^2 = 49 \end{cases}$.

Cao đẳng Giao thông vận tải II năm 2004

ĐS: $S = (x;y) = \left\{\left(\pm\dfrac{3\sqrt{35}}{5};\pm\dfrac{3\sqrt{35}}{5}\right),\left(-\dfrac{2\sqrt{21}}{3};\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right),\left(\dfrac{2\sqrt{21}}{3};-\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)\right\}$.

Bài tập 558. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7(x - y) \\ x^2 + y^2 = x + y + 2 \end{cases}$.

Cao đẳng sư phạm Hà Tĩnh khối A, B năm 2002

ĐS: $S = (x;y) = \left\{(1;2),(2;1),\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 559. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 3x - 2 \\ 2y^2 - x^2 = 3y - 2 \end{cases}$.

Cao đẳng Kinh tế Kỹ Thuật Thái Bình năm 2004

ĐS: $S = (x;y) = \{(1;1),(2;2)\}$.

Bài tập 560. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x + xy + y = -1 \end{cases}$.

Cao đẳng Xây dựng số III khối A năm 2004

ĐS: $S = (x;y) = \{(-1;-1),(-1;2),(2;-1)\}$.

Bài tập 561. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2 - y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{y} + \sqrt{2 - x} = \sqrt{2} \end{cases}$

Cao đẳng Sư Phạm Hưng Yên khối A năm 2006 – Đại học Quốc Gia năm 1997

ĐS: $S = (x;y) = \{(0;0),(2;2)\}$.

Bài tập 562. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + 1} + \sqrt{7 - y} = 4 \\ \sqrt{y + 1} + \sqrt{7 - x} = 4 \end{cases}$.

Đại học Văn Hóa khối D năm 2001 – Đại học Dân Lập Đông Đô năm 1998

ĐS: $(x;y) = (8;8)$.

Bài tập 563. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + 9} + \sqrt{y - 7} = 4 \\ \sqrt{y + 9} + \sqrt{x - 7} = 4 \end{cases}$.

Đại học Dân Lập Đông Đô khối A – V năm 2001

ĐS: $x = y = 7$.

Bài tập 564. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + 5} + \sqrt{y - 2} = 7 \\ \sqrt{x - 2} + \sqrt{y + 5} = 7 \end{cases}$.

Đại học Nông Nghiệp I khối A năm 2000

ĐS: $(x;y) = (11;11)$.

Bài tập 565. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$.

Đại học khối B năm 2003

ĐS: $S = (x;y) = (1;1)$.

Bài tập 566. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$.

Đại học khối A năm 2003

ĐS: $S = (x;y) = \left\{(1;1), \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 567. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$.

Dự bị 1 – Đại học khối A năm 2005

ĐS: $S = (x;y) = \left\{(\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), (1;-2), (-2;1)\right\}$.

Bài tập 568. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$.

Đề dự bị – Cao đẳng sư phạm Hà Nam khối M năm 2006

ĐS: $S = (x;y) = (1;1)$.

Bài tập 569. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 \\ x + y + xy = 3 \end{cases}$.

Cao đẳng Kinh tế Cần Thơ năm 2006 – Cao đẳng sư phạm Hà Nam năm 2005

ĐS: $S = (x;y) = \{(1;1)\}$.

Bài tập 570. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + y^4 = 34 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Cao đẳng Công nghiệp thực phẩm Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2006

ĐS: $S = (x;y) = \left\{(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}), (1+\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2})\right\}$.

Bài tập 571. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = \dfrac{3}{x^2} \\ 2y + x = \dfrac{3}{y^2} \end{cases}$.

Cao đẳng sư phạm Trà Vinh khối A – B năm 2006

<u>ĐS</u>: $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(1;1\right)\right\}$.

<u>Bài tập 572.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x-1\right)\left(y^2+6\right) = y\left(x^2+1\right) \\ \left(y-1\right)\left(x^2+6\right) = x\left(y^2+1\right) \end{cases}$.

Đề thi HSG khối 12 tỉnh Hưng Yên năm 2006 – 2007

<u>Bài tập 573.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2y+y^2x=6 \end{cases}$.

Cao đẳng sư phạm Trà Vinh khối M năm 2006 – Đại học Đà Nẵng khối A năm 1999

<u>ĐS</u>: $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(1;2\right),\left(2;1\right)\right\}$.

<u>Bài tập 574.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+x^2=1+y \\ xy+y^2=1+x \end{cases}$.

Cao đẳng Kinh tế kỹ thuật công nghiệp I khối A năm 2005

<u>ĐS</u>: $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(1;1\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\left(a;-a-1\right)\right\}$ và $\forall a \in \mathbb{R}$.

<u>Bài tập 575.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x=y^2+y \\ x^2+y^2=3\left(x+y\right) \end{cases}$.

Cao đẳng sư phạm Quãng Ninh khối A năm 2005

<u>ĐS</u>: $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(0;0\right),\left(3;3\right)\right\}$.

<u>Bài tập 576.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y} \\ \sqrt{y^2+3}+2\sqrt{y}=3+\sqrt{x} \end{cases}$.

<u>HD</u>: $x=y \Rightarrow \sqrt{x^2+3}+\sqrt{x}=3 \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

<u>Bài tập 577.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$.

Cao đẳng Sư phạm Cà Mau khối A năm 2005

<u>ĐS</u>: $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(2;3\right),\left(3;2\right)\right\}$.

<u>Bài tập 578.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+7x=y^3+7y \\ x^2+y^2=x+y+2 \end{cases}$.

Cao đẳng sư phạm Trà Vinh khối A năm 2005

<u>ĐS</u>: $\left(x;y\right) = \left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 579. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=20\end{cases}$.

Cao đẳng sư phạm Trà Vinh khối B – M năm 2005

ĐS: $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(1;16\right),\left(16;1\right)\right\}$.

Bài tập 580. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x}\\ 2y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y}\end{cases}$.

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối B năm 1999

ĐS: $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(-1;-1\right),\left(1;1\right),\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$.

Bài tập 581. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+y+xy=11\\ x^2+y^2+3\left(x+y\right)=28\end{cases}$.

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối D năm 2000

ĐS: $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(2;3\right),\left(3;2\right),\left(-7;-3\right),\left(-3;-7\right)\right\}$.

Bài tập 582. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+xy=7\\ x^4+y^4+x^2y^2=21\end{cases}$.

Đại học sư phạm Hà Nội khối B – D năm 2000

ĐS: $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(1;2\right),\left(2;1\right),\left(-1;-2\right),\left(-2;-1\right)\right\}$.

Bài tập 583. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy+x+y=11\\ x^2y+xy^2=30\end{cases}$.

Đại học Giao thông vận tải Hà Nội năm 2000

ĐS: $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(1;5\right),\left(5;1\right),\left(2;3\right),\left(3;2\right)\right\}$.

Bài tập 584. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2+3xy+y^2=12\\ x^2-xy+3y^2=11\end{cases}$.

Đại học Dân Lập Phương Đông khối A năm 2000

ĐS: $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{5}{\sqrt{3}}\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$.

Bài tập 585. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^5+y^5=1\\ x^9+y^9=x^4+y^4\end{cases}$.

Đại học Sư phạm Vinh khối D – M – T năm 2001

ĐS: $S = (x;y) = \{(1;0),(0;1)\}$.

Bài tập 586. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^8 + y^8 = x^{10} + y^{10} \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \{(0;\pm1),(\pm1;0)\}$.

Bài tập 587. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases}$.

Học Viện Quan Hệ Quốc Tế khối D năm 2001

ĐS: $S = (x;y) = \{(1;3),(3;1)\}$.

Bài tập 588. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1 - 2xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Đại học An Ninh khối D năm 2001

ĐS: $S = (x;y) = \{(0;1),(1;0)\}$.

Bài tập 589. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = 26 \end{cases}$.

Đại học Cảnh Sát Nhân Dân khối G – Hệ chuyên ban năm 2000

Bài tập 590. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3} \\ xy = 9 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Cao đẳng Du lịch Hà Nội khối A năm 2006

Bài tập 591. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$.

Cao đẳng sư phạm Hà Nam khối A năm 2005

Bài tập 592. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = x^2 + y^2 \end{cases}$.

Cao đẳng sư phạm kỹ thuật Vinh khối A năm 2006

Bài tập 593. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y - y^2 = 4 \\ xy^2 - x^2 = 4 \end{cases}$.

Cao đẳng sư phạm Hải Dương khối B năm 2005

Bài tập 594. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy = \dfrac{7}{2} \\ x + y = \dfrac{3}{2}xy \end{cases}$.

Đại học Dân Lập Hải Phòng khối B – D năm 2000

Bài tập 595. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 \end{cases}$.

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối B năm 2000

Bài tập 596. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

Học Viện Chính Trị Quốc Gia năm 2001

Bài tập 597. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$.

Cao đẳng Y Tế Nam Định năm 2001

ĐS: $(x;y) = \left\{(2;0),(0;2)\right\}$.

Bài tập 598. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - xy - y = 1 \\ x^2y - xy^2 = 6 \end{cases}$.

Đại học Đà Nẵng khối A đợt I năm 2000

Bài tập 599. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x}{y}} + \sqrt{\dfrac{2y}{x}} = 3 \\ x - y + xy = 3 \end{cases}$.

Viện Đại học Mở Hà Nội năm 2001

ĐS: $S = (x;y) = \left\{(2;1),(-1;-2),\left(-3;-\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{3}{2};3\right)\right\}$.

Bài tập 600. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 3x - 2 \\ 2y^2 - x^2 = 3y - 2 \end{cases}$.

Cao đẳng Tài Chính Kế Toán năm 2001

Bài tập 601. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1 \end{cases}$.

Cao đẳng Sư Phạm Huế khối B – T năm 2001

Bài tập 602. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -3 \\ 9y^2 + 11xy - 8x^2 = 6 \end{cases}$.

Đại học Kiến Trúc năm 1995

ĐS: $(x;y) = \left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),(1;-2),(-1;2)\right\}$.

Bài tập 603. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=13\\(x+y)(x^2-y^2)=25\end{cases}$.

ĐS: $(x;y)=\{(3;2),(-2;-3)\}$.

Bài tập 604. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2+x-\dfrac{1}{y}=2\\y-y^2x-2y^2=-2\end{cases}$.

ĐS: $(x;y)=\left\{(-1;-1),(1;1),\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};1+\sqrt{3}\right),\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};1-\sqrt{3}\right)\right\}$.

Bài tập 605. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3y(1+y)+x^2y^2(2+y)+xy^3-30=0\\x^2y+x(1+y+y^2)+y-11=0\end{cases}$.

HD: Sử dụng Viét $\Rightarrow (x;y)=\left\{(1;2),(2;1),\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2};\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right),\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2};\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 606. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1\\\sqrt{x+y}+x-y=0\end{cases}$.

HD: Bình phương $\text{PT}(1)\Rightarrow (x;y)=(1;3)$.

Bài tập 607. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy^2-2y+3x^2=0\\y^2+x^2y+2x=0\end{cases}$.

HD: Với $x\neq 0$ thì lấy $(2).x-(1)\Rightarrow y=\dfrac{x^2}{x^3+2}\Rightarrow (x;y)=(-1;1),\left(-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}};-\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}\right)$.

Bài tập 608. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3xy+2y=5\\2xy(x+y)+y^2=5\end{cases}$.

HD: Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2=\dfrac{5}{y}\\2x^2+2xy+y=\dfrac{5}{y}\end{cases}\Rightarrow 2x^2+2xy+y=3x+2\Rightarrow (x;y)=(1;1),\left(-\dfrac{1}{2};10\right),\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Bài tập 609. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}=2(y^4-x^4)\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=(3y^2+x^2)(3x^2+y^2)\end{cases}$.

HD: Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}2=5xy^4+x^5+10x^3y^2\\1=5yx^4+y^5+10x^2y^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^5=3\\(x-y)^5=1\end{cases}\Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{1+\sqrt[5]{3}}{2};\dfrac{\sqrt[5]{3}-1}{2}\right)$.

B – BIẾN ĐỔI MỘT PHƯƠNG TRÌNH THÀNH TÍCH & KẾT HỢP PHƯƠNG TRÌNH CÒN LẠI



I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

— Lựa chọn một phương trình biến đổi về tích số (thường lựa chọn phương trình phức tạp và có khả năng biến đổi được).

— Dùng các phép biến đổi đồng nhất kết hợp với việc tách, nhóm, ghép thích hợp để đưa phương trình về dạng tích đơn giản hơn và biết cách giải.

Một số biến đổi thường gặp

- $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ với $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của $f(x) = 0$.
- Chia Hoocner để đưa về dạng tích số.
- Các hằng đẳng thức thường gặp.
- $u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u - 1)(v - 1) = 0$.
- $au + bv = ab + vu \Leftrightarrow (u - b)(v - a) = 0$.

……. .

— Kết hợp với phương trình còn lại, lưu ý: $\begin{cases} A.B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$.

II – CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 167. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 & (1) \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 & (2) \end{cases}$

Đại học khối D năm 2012

Bài giải tham khảo

$$(2) \Leftrightarrow 2x(x^2 - y) - y(x^2 - y) + (x^2 - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y)(2x - y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2x + 1 \end{array}\right.$$

- Kết hợp với (1), ta được hệ: $\begin{cases} y = x^2 \\ xy + x - 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2x + 1 \\ xy + x - 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x - 2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = \pm\sqrt{5} \end{cases}.$$

- Vậy nghiệm hệ là $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(1;1\right),\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};-\sqrt{5}\right),\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 168.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0 & \left(1\right)\\ xy\left(x^2+y^2\right)+2=\left(x+y\right)^2 & \left(2\right)\end{cases}$

Đại học khối A năm 2011

<u>Bài giải tham khảo</u>

$\left(2\right)\Leftrightarrow xy\left(x^2+y^2\right)+2=x^2+y^2+2xy\Leftrightarrow xy\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)+2-2xy=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)\left(xy-1\right)-2\left(xy-1\right)=0\Leftrightarrow\left(xy-1\right)\left(x^2+y^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}xy=1\\ x^2+y^2=2\end{array}\right.$

- Trường hợp 1. $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$.

- Trường hợp 2. $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0\\ x^2+y^2=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right)=0\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\ \vee\ y=\dfrac{1}{2}x\\ x^2+y^2=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\end{cases}$.

- Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm: $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(1;1\right),\left(-1;-1\right),\left(\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 169.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-6x^2y+9xy^2-4y^3=0 & \left(1\right)\\ \sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}=2 & \left(2\right)\end{cases}$

Đề thi thử Đại học lần 1 khối B năm 2013 – Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases}x-y\ge 0\\ x+y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x>y\ge 0$.

$\left(1\right)\Leftrightarrow x^3-4x^2y-2x^2y+8xy^2+xy^2-4y^3=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(x-4y\right)-2xy\left(x-4y\right)+y^2\left(x-4y\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-4y\right)\left(x^2-2xy+y^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-4y\right)\left(x-y\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4y\\x=y\end{array}\right.$.

Kết hợp với $\left(1\right)$, hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}x=4y\\\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}=2\end{cases} \vee \begin{cases}x=y\\\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3y}+\sqrt{5y}=2\\x=4y\end{cases} \vee \begin{cases}\sqrt{2y}=2\\x=y\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}8y+2\sqrt{15y^2}=4\\x=4y\end{cases} \vee \begin{cases}y=2\\x=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=8-2\sqrt{15}\\x=32-8\sqrt{15}\end{cases} \vee \begin{cases}y=2\\x=2\end{cases}$.

- Vậy nghiệm của hệ là $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(2;2\right),\left(32-8\sqrt{15};\ 8-2\sqrt{15}\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 170.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy+x+y=x^2-2y^2 & \left(1\right)\\x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y & \left(2\right)\end{cases}$

Đại học khối D năm 2008

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 1\\y\ge 0\end{cases} \Rightarrow x+y\ge 1$.

<u>Cách biến đổi 1</u>.

$\left(1\right)\Leftrightarrow x^2-2y^2-xy-\left(x+y\right)=0\Leftrightarrow \left(x^2+2xy+y^2\right)-3xy-3y^2-\left(x+y\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+y\right)^2-3y\left(x+y\right)-\left(x+y\right)=0\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(x-2y-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=0\ \left(L\right)\\x=2y+1\end{array}\right.$.

<u>Cách biến đổi 2</u>.

$\left(1\right)\Leftrightarrow xy+y^2+x+y+\boxed{y^2-x^2}=0\Leftrightarrow y\left(x+y\right)+\left(x+y\right)+\left(y-x\right)\left(x+y\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(2y+1-x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=0\quad \left(L\right)\\x=2y+1\end{array}\right.$.

- Kết hợp với phương trình $\left(2\right)$, ta được: $\begin{cases}x=2y+1\\\left(2y+1\right)\sqrt{2y}-y\sqrt{2y}=2y+2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{2y}\left(y+1\right) - 2\left(y+1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y+1 \\ \left(y+1\right)\left(\sqrt{2y}-2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases} \left(L\right) \vee \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases}.$$

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(5;2\right)\right\}$.

Thí dụ 171. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8 & \left(1\right) \\ \sqrt{3y^2+13} - \sqrt{15-2x} = \sqrt{x+1} & \left(2\right) \end{cases}$

Trích Đề thi thử Đại học lần 1 khối A, B, D năm 2013 – THPT Trần Phú – Hà Tĩnh

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 15-2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le \dfrac{15}{2}$.

$$\left(1\right) \Leftrightarrow y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8 \Leftrightarrow \left(y^2 - x\right)^2 + 7\left(y^2 - x\right) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2 - x - 1\right)\left(y^2 - x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = x+1 \\ y^2 = x-8 \end{array}\right..$$

- Với $y^2 = x+1$, thay vào $\left(2\right)$ ta được: $\sqrt{3x+16} - \sqrt{15-2x} = \sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+16} = \sqrt{15-2x} + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{\left(x+1\right)\left(15-2x\right)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 6x^2 - 13x - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = 3 \ \vee \ x = -\dfrac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2.$$

- Với $x \le \dfrac{15}{2} \Leftrightarrow x - 8 \le -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 = x - 8 \le -\dfrac{1}{2}$ (vô lí) nên loại $y^2 = x - 8$.
- Vậy nghiệm của hệ là $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(3;-2\right),\left(3;2\right)\right\}$.

Thí dụ 172. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 & \left(1\right) \\ \left(x-1\right)^4 = y & \left(2\right) \end{cases}$

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 400 tháng 10 năm 2010

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge 1 \ \wedge \ y \ge 0$.
- Thay $\left(2\right)$ vào $\left(1\right)$: $\sqrt{x-1} - \left(x-1\right)^2 = 8 - x^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -x^3 + x^2 - 2x + 9 \quad \left(3\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} - 1\right) - \left[\left(x-1\right)^2 - 1\right] + x^3 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} - x\left(x-2\right) + \left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x^2+x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x^2+x+4=0\ \left(\text{VN do: } f\left(x\right)>0,\ \forall x\geq 1\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$$

- Thay $x=2$ vào $\left(2\right)$ ta được nghiệm duy nhất của hệ là $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$.

<u>Thí dụ 173.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+3=2\sqrt{\left(3y-x\right)\left(y+1\right)} & \left(1\right) \\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\dfrac{x+5}{2}}=xy-2y-2 & \left(2\right)\end{cases}$

Trích Đề thi thử Đại học năm 2012 đợt 1 – TTBDVH Thăng Long Tp. Hồ Chí Minh

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases} y\geq \dfrac{2}{3} \\ x\geq -5 \\ \left(3y-x\right)\left(y+1\right)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq \dfrac{2}{3} \\ x\geq -5 \\ 3x-y\geq 0\end{cases}.$

$$\left(1\right)\Leftrightarrow 3\left(y+1\right)-\left(3y-x\right)=2\sqrt{3y-x}.\sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[2\left(\sqrt{y+1}\right)^2-2\sqrt{3y-x}.\sqrt{y+1}\right]+\left[\left(\sqrt{y+1}\right)^2-\left(\sqrt{3y-x}\right)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{y+1}\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{3y-x}\right)+\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{3y-x}\right)\left(\sqrt{y+1}+\sqrt{3y-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y+1}-\sqrt{3y-x}\right)\left(3\sqrt{y+1}+\sqrt{3y-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{y+1}-\sqrt{3y-x}=0 \\ 0=3\sqrt{y+1}+\sqrt{3y-x}>0\ \left(L\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{y+1}=\sqrt{3y-x}\Leftrightarrow x=2y-1\quad\left(3\right)$$

- Thay $\left(3\right)$ vào $\left(2\right)$, ta được: $\sqrt{3y-2}-\sqrt{y+2}=2y^2-3y-2$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(y-2\right)}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}=\left(y-2\right)\left(2y+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(y-2\right)\left[\frac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}-\left(2y+1\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2\Rightarrow x=3 \\ \dfrac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}-\left(2y+1\right)=0 \qquad \left(4\right)\end{array}\right.$$

$$\left(2\right)\Leftrightarrow 2-\left(2y+1\right)\left(\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}\right)=0\qquad\left(5\right)$$

- Do $y \ge \frac{2}{3} \Rightarrow (2y+1)\left(\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}\right) \ge \left(2.\frac{2}{3}+1\right)\sqrt{\frac{2}{3}+2}$

$$\Leftrightarrow -(2y+1)\left(\sqrt{3y-2}+\sqrt{y-2}\right) \le -\frac{7}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}$$

$2-(2y+1)\left(\sqrt{3y-2}+\sqrt{y-2}\right) \le 2-\frac{7}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} < 0 \Rightarrow (5)$ vô nghiệm.

- So với điều kiện, hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x;y)=(3;2)$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

<u>Bài tập 610.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2+xy-x^2=0 \\ x^2-xy-y^2+3x+7y+3=0 \end{cases}$.

<u>ĐS</u>: $(x;y)=\left\{(1;-1),(3;-3),\left(-13+\sqrt{157};\frac{-13+\sqrt{157}}{2}\right),\left(-13-\sqrt{157};\frac{-13-\sqrt{157}}{2}\right)\right\}$.

<u>Bài tập 611.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+xy-6x=3 \\ y^2-2xy+2x=1 \end{cases}$.

<u>HD</u>: PT $(2) \Leftrightarrow (x-y)(x+2y+1)=0 \Rightarrow (x;y)=\left\{\left(-\frac{2}{5};1\right),(2;3),\left(-\frac{1}{6};-\frac{4}{3}\right)\right\}$.

<u>Bài tập 612.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3+2x^2y-xy=y^2-x-y \\ 2x^3-xy+x^2=4 \end{cases}$.

<u>ĐS</u>: $S=(x;y)=\left\{(1;-1),\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};10+\sqrt{17}\right),\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2};10-\sqrt{17}\right)\right\}$.

<u>Bài tập 613.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-2y^2+xy+x-y=0 \\ x^3-y^3+2x^2y+y^2=-1 \end{cases}$.

<u>HD</u>: PT $(1) \Leftrightarrow (x-y)(x+2y+1)=0$.

<u>Bài tập 614.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y} \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$.

Đại học khối A năm 2003

<u>ĐS</u>: $S=(x;y)=\left\{(1;1),\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 615. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1+\sqrt{x^2-y^2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases}$.

HD: PT $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+y}-1\right)\left(\sqrt{x-y}-1\right)=0 \Rightarrow (x;y)=(1;0)$.

Bài tập 616. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2-8xy^2-xy+4y^3=0 \\ 16x^3+2x-8y^2+5=0 \end{cases}$.

HD: PT$(1) \Leftrightarrow \left(x-4y^2\right)(2x-y)=0 \Rightarrow (x;y)=\left\{\left(\frac{1}{2};1\right),\left(\frac{3\pm\sqrt{19}}{4};\frac{3\pm\sqrt{19}}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 617. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=5x-y-2 \\ x^2+y^2+x+y=4 \end{cases}$.

HD: PT $(1) \Leftrightarrow (x+y-2)(2x-y-1)=0 \Rightarrow (x;y)=\left\{(1;1),\left(-\frac{4}{5};-\frac{13}{5}\right)\right\}$.

Bài tập 618. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2+x+3y=xy+3 \\ 2y^2-3xy-9x^2+3x=y \end{cases}$.

HD: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)\left(x^2+1-y\right)=0 \\ (y-3x)(2y+3x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow (x;y)=\left\{(3;-4),(3;9),(-1;2),\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)\right\}$.

Bài tập 619. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+5x-xy=3y-6 \\ 4x^2y-3xy+2y^2=9 \end{cases}$.

HD: PT$(1) \Leftrightarrow (x+3)(x+2-y)=0 \Rightarrow (x;y)=\left\{\left(-3;\frac{-45\pm3\sqrt{233}}{4}\right),(-1;1),\left(\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right)\right\}$.

Bài tập 620. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3-2x^3=3 \\ y=4x^3-x+3 \end{cases}$.

Đề thi thử Đại học lần 2 khối D năm 2013 – THPT Nguyễn Trãi – Hải Dương

ĐS: $(x;y)=\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{4}};\ \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)$.

Bài tập 621. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2+6y=\frac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}$.

HD: PT $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-y}+2y\right)\left(\sqrt{x-2}-3y\right)=0 \Rightarrow (x;y)=\left\{(12;-2),\left(\frac{8}{3};\frac{4}{9}\right)\right\}$.

Bài tập 622. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 + (y-3)x - 4y = -3 \\ \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{2-y} = 3 \end{cases}$.

HD: $PT(1) \Leftrightarrow (y-3)(x+y-1) = 0 \Rightarrow (x;y) = (3;2)$.

Bài tập 623. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 12\dfrac{y}{x} = 3 + x - 2\sqrt{4y-x} \\ \sqrt{y+3} + y = x^2 - x - 3 \end{cases}$.

HD: $PT\ (2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y+3} + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

Bài tập 624. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3y^2 + 1 + 2y(x+1) = 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} \\ y(y-x) = 3 - 3y \end{cases}$.

Đề thi thử Đại học năm 2013 lần 1 – THPT Thái Hòa – Nghệ An

HD: $PT(1) \Leftrightarrow \left(2y - \sqrt{x^2 + 2y + 1}\right)^2 = (x-y)^2 \Rightarrow (x;y) = \left\{(1;1), \left(\dfrac{415}{51}; \dfrac{17}{3}\right)\right\}$.

Bài tập 625. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \sqrt{y-1}(x+y-1) = (y-2)\sqrt{x+y} \end{cases}$.

HD: $PT\ (2) \Leftrightarrow \left(1 + \sqrt{y-1}\sqrt{x+y}\right)\left(\sqrt{x+y} - \sqrt{y-1}\right) = 0 \Rightarrow (x;y) = (-1;2)$.

Bài tập 626. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{xy-y} + x + y = 5 \\ \sqrt{5-x} + \sqrt{1-y} = 1 \end{cases}$.

HD: $PT\ (2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y} + \sqrt{x-1} + 2\right)\left(\sqrt{y} + \sqrt{x-1} - 2\right) = 0 \Rightarrow (x;y) = (5;0)$.

Bài tập 627. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2y^2 = x^2y + 2xy \\ 2\sqrt{x^2 - 2y - 1} + \sqrt[3]{y^3 - 14} = x - 2 \end{cases}$.

HD: $PT\ (1) \Leftrightarrow (x-y)(x^2 - 2y) = 0 \Rightarrow (x;y) = \left(1 \pm \sqrt{2};\ 1 \pm \sqrt{2}\right)$.

Bài tập 628. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x(y+1) - 2y(y-1) = 3 \\ \sqrt{x^2 + y} - x = \dfrac{4+y}{2\sqrt{x^2+y}} \end{cases}$.

HD: $PT\ (2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y} - x\right)^2 = 4$.

Bài tập 629. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8 \\ \sqrt{3y^2 + 13} - \sqrt{15 - 2x} = \sqrt{x+1} \end{cases}$.

<u>HD</u>: PT $(1) \Leftrightarrow (y^2 - x)^2 + 7(y^2 - x) - 8 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - x - 1)(y^2 - x + 8) = 0$.

<u>Bài tập 630.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x - 1} - \sqrt{2y - 1} = 1 \end{cases}$.

Đề thi thử Đại học lần 1 năm 2010 – THPT Minh Khai – Hà Tĩnh

<u>HD</u>: PT $(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = 0$.

<u>Bài tập 631.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x + y} = 1 \\ \sqrt{x + y} = x^2 - y \end{cases}$.

Đề thi thử Đại học lần 2 năm 2010 – THPT Chuyên Lê Quí Đôn – Tp. Hồ Chí Minh

<u>HD</u>: $(1) \Leftrightarrow (x + y - 1)(x^2 + y^2 + x + y) = 0 \Rightarrow (x; y) = \{(1; 0), (-2; 3)\}$.

<u>Bài tập 632.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2y - 4x^2 + 4y^3 + 16xy - 16y^2 = 0 \\ \sqrt{x - 2y} + \sqrt{x + y} = 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Đề thi thử Đại học lần 2 khối A, B năm 2013 – THPT Hùng Vương

<u>HD</u>: PT $(1) \Leftrightarrow (x - 2y)^2 (x + y - 4) = 0 \Rightarrow (x; y) = \left\{(8; 4), \left(8 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3} - 4\right)\right\}$.

<u>Bài tập 633.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 \\ 4\sqrt{x + 2} + \sqrt{16 - 3y} = x^2 + 8 \end{cases}$.

Đề thi thử Đại học lần 2 năm 2013 khối A, B – THPT Lương Tài 2 – Bắc Ninh

<u>HD</u>: PT$(1) \Leftrightarrow (x - 1)^3 = (y + 1)^3 \Rightarrow (x; y) = \{(2; 0), (-1; -3)\}$.

<u>Bài tập 634.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x^2 + y^2 = 5(2x - y)\sqrt{xy} \end{cases}$.

<u>HD</u>: PT$(2) \Leftrightarrow (2x - \sqrt{xy} - y)(2x - 4\sqrt{xy} - y) = 0 \Rightarrow (x; y) = (1; 1), \left(\dfrac{22 + 8\sqrt{6}}{25}; \dfrac{22 - 8\sqrt{6}}{25}\right)$.

C – GIẢI HỆ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ HỆ CƠ BẢN



Thí dụ 174. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy - x + y = -3 \\ x^2 + y^2 - x + y + xy = 6 \end{cases} \quad (*)$

Cao đẳng Kế hoạch Đà Nẵng năm 2004

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x) + xy = -3 \\ (y-x)^2 + (y-x) + 3xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = -3 \\ u^2 + u + 3v = 6 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u = y - x \\ v = xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -u - 3 \\ u^2 - 2u - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3 \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 5 \\ v = -8 \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} u = -3 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = -3 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}.$
- Với $\begin{cases} u = 5 \\ v = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 5 \\ xy = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ x(x+5) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ x^2 + 5x + 8 = 0 \end{cases} \ (VN).$
- Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $S = (x;y) = \{(0;-3),(3;0)\}$.

Thí dụ 175. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = 5 \\ (x+y)\dfrac{x}{y} = 6 \end{cases} \quad (*)$

Đại học Thủy Sản Nha Trang năm 1999

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $y \neq 0$. Đặt $u = x + y,\ v = \dfrac{x}{y}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ u.v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$
- Với $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$
- Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right),(2;1)\right\}$.

Thí dụ 176. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^3 = 12 \\ (xy)^2 + xy = 6 \end{cases} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $y \neq 0$. Đặt $u = \dfrac{x}{y};\ v = xy$. Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + u^3 = 12 \\ v^2 + v - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ \left[\begin{array}{l} v = 2 \\ v = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2 \\ xy = -3 \end{cases} (VN)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

- Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $S = (x;y) = \{(2;1), (-2;-1)\}$.

Thí dụ 177. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2 \end{cases},\ (x, y \in \mathbb{R}) \quad (*)$

Cao đẳng khối A năm 2010

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $2x + y \geq 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2x+y} + (2x+y) - 3 = 0 & (1) \\ x^2 - 2xy - y^2 - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Đặt $t = \sqrt{2x+y},\ (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 2x + y$.

$$(1) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \quad (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 2x.$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x(1-2x) - (1-2x)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}.$$

- Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $S = (x;y) = \{(1;-1), (-3;7)\}$.

Thí dụ 178. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x-y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x-y) \end{cases} \quad (*)$

Đại học Hàng Hải khối A năm 2001

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + 3xy = 19(x-y)^2 \\ (x-y)^2 + xy = 7(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 3v = 19u^2 \\ u^2 + v = 7u \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u = x - y \\ v = xy \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 6u^2 \\ u^2 - 7u + 6u^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6u^2 \\ u = 0 \ \vee \ u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}.$$

- Vậy hệ phương trình có ba nghiệm: $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(0;0\right),\left(3;2\right),\left(-2;-3\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 179.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 12x + 3y - 4\sqrt{xy} = 16 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y+5} = 6 \end{cases} \quad \left(*\right)$

Trích Đề thi thử Đại học khối A, B, D năm 2013 – THPT Hà Huy Tập – Hà Tĩnh

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $xy \ge 0,\ x \ge -\dfrac{5}{4},\ y \ge -5$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(4x+y\right) - 4\sqrt{xy} = 16 \\ 4x + y + 10 + 2\sqrt{\left(4x+5\right)\left(y+5\right)} = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(4x+y\right) - 4\sqrt{xy} = 16 \\ \left(4x+y\right) + 2\sqrt{4xy + 5\left(4x+y\right) + 25} = 26 \end{cases} \quad \left(1\right)$$

- Đặt $\begin{cases} u = 4x + y \\ v = 4xy \end{cases}$. Lúc đó: $\left(1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 2\sqrt{v} = 16 \\ u + 2\sqrt{v + 5u + 25} = 26 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{v} = 3u - 16 \\ 2\sqrt{v + 5u + 25} = 26 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 16 \ge 0 \\ 4v = \left(3u - 16\right)^2 \\ 26 - u \ge 0 \\ 4\left(v + 5u + 25\right) = \left(26 - u\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{3} \le u \le 16 \\ 4v = 9u^2 - 96u + 256 \\ 4v^2 + 20u + 100 = 676 - 52u + u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{3} \le u \le 16 \\ 4v = 9u^2 - 96u + 256 \\ u^2 - 3u - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ v = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 4x + y = 8 \\ v = 4xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}.$$

- Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\left(x;y\right) = \left(1;4\right)$.

<u>Thí dụ 180.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 6} - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \quad \left(*\right)$

Trích Đề thi thử Đại học khối A, B, D năm 2013 – THPT Phúc Trạch – Hà Tĩnh

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $y+1\ge 0 \Leftrightarrow y\ge -1$.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+6=1+2y+y^2 \\ \dfrac{1}{4}\left[3\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2\right]=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2\left(x-y\right)=-5 \\ \dfrac{1}{4}\left[3\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2\right]=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-y\right)\left(x+y+2\right)=-5 \\ 3\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v\left(u+2\right)=-5 \\ 3u^2+v^2=28 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=-\dfrac{5}{u+2} \\ 3u^2+\left(-\dfrac{5}{u+2}\right)^2=28 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-1 \\ v=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

- So với điều kiện, nghiệm của hệ là $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(-3;2\right),\left(1;2\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 181.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases} \quad \left(*\right)$

Đại học sư phạm Hà Nội khối A năm 2000

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Với $x=0:\left(*\right)\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 1=0 \end{cases} \Rightarrow x=0$ không là nghiệm của hệ $\left(*\right)$.

- Với $x\ne 0$, chia hai vế cho $x^2\ne 0$ ta được:

$$\left(*\right)\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x^2}+\dfrac{y^2}{x}=6 \\ \dfrac{1}{x^2}+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x}+y\right)=6 \\ \left(\dfrac{1}{x}+y\right)^2-2.\dfrac{y}{x}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=6 \\ v^2-2u=5 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u=\dfrac{y}{x} \\ v=\dfrac{1}{x}+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{v^2-5}{3} \\ v^3-5v-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3 \\ u=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+y=3 \\ \dfrac{1}{x}.y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{1}{x}=2 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

- Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(1;2\right),\left(\dfrac{1}{2};1\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 182.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+1+y\left(y+x\right)=4y \\ \left(x^2+1\right)\left(y+x-2\right)=y \end{cases} \quad \left(*\right)$

Dự bị 1 – Đại học khối A năm 2006

Bài giải tham khảo

- Với $y = 0$, thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ (x^2+1)(x-2) = 0 \end{cases}$ (VN).

- Với $y \neq 0$, chia hai vế của mỗi phương trình trong $(*)$ cho $y \neq 0$ ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} + (y+x-2) = 2 \\ \dfrac{x^2+1}{x}(y+x-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2 \\ uv = 1 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u = \dfrac{x^2+1}{y} \\ v = y+x-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{x^2+1}{y} = 1 \\ v = y+x-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = y \\ y = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 = 0 \\ y = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

- Vậy nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \{(1;2),(-2;5)\}$.

Thí dụ 183. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases}$ $(*)$

Đại học Thương Mại năm 2001 – HSG lớp 10 huyện Hóc Môn, Tp.HCM năm 2013

Bài giải tham khảo

- Với $x = 0 : (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $(VN) \Rightarrow x = 0:$ không là nghiệm hệ.

- Với $x \neq 0:$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} + y^3 = 19 \\ \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x^3} + 3\dfrac{1}{x^2}y + 3\dfrac{1}{x}y^2 + y^3\right) - 3\dfrac{1}{x^2}y - 3\dfrac{1}{x}y^2 = 19 \\ \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x} + y\right)^3 - 3\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = 19 \\ \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - 3uv = 19 \\ uv = -6 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u = \dfrac{1}{x} + y \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 1 \\ uv = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 1 \\ \dfrac{y}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6x \\ 16x^2 + x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}.$$

- Vậy hệ có hai nghiệm: $S = (x;y) = \left\{\left(\dfrac{1}{3};-2\right),\left(-\dfrac{1}{2};3\right)\right\}$.

Thí dụ 184. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4xy + 4\left(x^2 + y^2\right) + \dfrac{3}{\left(x+y\right)^2} = 7 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases} \quad \left(*\right)$

Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 379 tháng 1 năm 2009

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x + y = 0$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \left(x^2 - 2xy + y^2\right) + \dfrac{3}{\left(x+y\right)^2} = 7 \\ \left(x+y\right) + \left(x-y\right) + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left[\left(x+y\right)^2 + \dfrac{1}{\left(x+y\right)^2}\right] + \left(x-y\right)^2 = 7 \\ \left(x+y\right) + \dfrac{1}{x+y} + \left(x-y\right) = 3 \end{cases} \quad \left(**\right)$$

- Đặt $\begin{cases} u = \left(x+y\right) + \dfrac{1}{\left(x+y\right)} \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow u^2 = \left(x+y\right)^2 + \dfrac{1}{\left(x+y\right)^2} + 2, \quad \left(\left|u\right| \ge 2\right)$

$$\left(**\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(u^2 - 2\right) + v^2 = 7 \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 + v^2 = 13 \\ v = 3 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 + \left(3-u\right)^2 = 13 \\ v = 3 - u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 + 9 - 6u + u^2 = 13 \\ v = 3 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u^2 - 6u - 4 = 0 \\ v = 3 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\dfrac{1}{2} \ \left(L\right) \ \vee \ u = 2 \ \left(N\right) \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x+y} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+y\right)^2 - 2\left(x+y\right) + 1 = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

- Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(1;0\right)\right\}$.

Thí dụ 185. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8\left(x^2 + y^2\right) + 4xy + \dfrac{5}{\left(x+y\right)^2} = 13 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 1 \end{cases} \quad \left(*\right)$

Đề thi học sinh giỏi tỉnh Thái Nguyên năm 2011

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ne -y$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(x^2+2xy+y^2\right)+3\left(x^2-2xy+y^2\right)+\dfrac{5}{\left(x+y\right)^2}=13 \\ x+y+x-y+\dfrac{1}{x+y}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left[\left(x+y\right)^2+\dfrac{1}{\left(x+y\right)^2}\right]+3\left(x-y\right)^2=13 \\ \left(x+y\right)+\dfrac{1}{x+y}+\left(x-y\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)+3b^2=13 \\ a+\dfrac{1}{a}+b=1 \end{cases} \quad \left(1\right)$$

Với $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases} \quad \left(2\right)$

- Đặt $u=a+\dfrac{1}{a} \Rightarrow u^2=a^2+\dfrac{1}{a^2}+2 \Rightarrow a^2+\dfrac{1}{a^2}=u^2-2,\ \left(\left|u\right|\geq 2\right)$. Khi đó:

$$\left(1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5u^2+3b^2=23 \\ u+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-u \\ 5u^2+3\left(1-u\right)^2=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-u \\ u=-\dfrac{5}{4}\ \left(L\right) \\ u=2\ \left(N\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+\frac{1}{a}=2 \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1.$$

- Thay a, b vào $\left(2\right)$, ta được hệ: $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.
- Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $S=\left(x;y\right)=\left(0;1\right)$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 635. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} \\ x+y=\sqrt{x+y+2} \end{cases}$.

Đại học khối B năm 2002

ĐS: $\left(x;y\right)=\left\{\left(1;1\right),\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 636. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

Dự bị 2 Đại học khối A năm 2005

ĐS: $\left(x;y\right)=\left\{\left(2;-1\right)\right\}$.

Bài tập 637. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12 \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12 \end{cases}$.

Đề thi thử Đại học 2013 khối A – THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng

HD: $u = \sqrt{x^2 - y^2} \ge 0,\ v = x + y \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}\left(v - \dfrac{u^2}{v}\right) \Rightarrow \left(x;y\right) = \left\{\left(5;3\right),\left(5;4\right)\right\}$.

Bài tập 638. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2 + 3x = \dfrac{8}{y^3} \\ x^3 - 2 = \dfrac{6}{y} \end{cases}$.

HD: $\begin{cases} u = \dfrac{2}{y} \ne 0 \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \left(x;y\right) = \left\{\left(-1;-2\right),\left(2;1\right)\right\}$.

Bài tập 639. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases}$

Dự bị 2 Đại học khối A năm 2007

ĐS: $S = \left\{\left(1;1\right),\left(-1;-1\right)\right\}$. Đặt $u = x^2 + xy,\ v = x^3y$.

Bài tập 640. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + x + 2 - \dfrac{4}{y} = 0 \\ 1 + y^2 - y^3\left(4x - 2\right) = 0 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right) = \left\{\left(1;1\right),\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 641. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\left(x + y + 1\right) - 3 = 0 \\ \left(x + y\right)^2 - \dfrac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$.

Đại học khối D năm 2009

HD: $\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \left(x;y\right) = \left\{\left(1;1\right),\left(2;-\dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 642. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(3 - x\right)\sqrt{2 - x} - 2y\sqrt{2y - 1} = 0 \\ 2\sqrt{2 - x} - \sqrt{\left(2y - 1\right)^3} = 1 \end{cases}$.

HD: $\begin{cases} u = \sqrt{2 - x} \ge 0 \\ v = \sqrt{2y - 1} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow u = v \Rightarrow \left(x;y\right) = \left\{\left(1;1\right),\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2};\dfrac{5 - \sqrt{5}}{4}\right)\right\}$.

Bài tập 643. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy\left(1 + 2x\right) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Đại học khối A năm 2008

<u>ĐS</u>: $S = \left\{\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right), \left(1; -\dfrac{3}{2}\right)\right\}$. Đặt $u = x^2 + y;\ v = xy$.

Bài tập 644. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$.

Đại học Ngoại Thương Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1997 – 1998

<u>ĐS</u>: $S = \left\{\left(1, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 1\right)\right\}$.

Bài tập 645. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ \sqrt{x + y} - 2\sqrt{x - y} = 1 \end{cases}$.

<u>HD</u>: $\begin{cases} u = \sqrt{x + y} \ge 0 \\ v = \sqrt{x - y} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(x; y\right) = \left(5; 4\right)$.

Bài tập 646. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y\left(x^2 - y^2\right) = 3x \\ x\left(x^2 + y^2\right) = 10y \end{cases}$.

Đại học Mỏ – Địa Chất năm 1997 – 1998

<u>ĐS</u>: $S = \left\{\left(0, 0\right), \left(\pm 2, \pm 1\right), \left(\pm\dfrac{\sqrt{5\sqrt{15}}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3\sqrt{15}}}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 647. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x - 1 = 3y \\ x^2y - x = 2y^2 \end{cases}$.

Đề thi thử Đại học lần 1 khối A năm 2013 – THPT chuyên Bắc Ninh

<u>HD</u>: $u = x - \dfrac{1}{y}, v = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \left(x; y\right) = \left\{\left(1 \pm \sqrt{2}; 1 \pm \sqrt{2}\right), \left(2; 1\right), \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 648. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y\left(x + y\right)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$.

<u>HD</u>: Đặt $u = x + y,\ \ v = \dfrac{x^2 + 1}{y}$.

Bài tập 649. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$.

HD: $u = 2x,\ v = \dfrac{3}{y} \Rightarrow \left(x;y\right) = \left\{\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4};\dfrac{6}{3+\sqrt{5}}\right),\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{4};\dfrac{6}{3-\sqrt{5}}\right)\right\}$.

Bài tập 650. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3y^3 + 8 = 16y^3 \\ x\left(xy+2\right) = 8y^2 \end{cases}$.

HD: $u = \dfrac{2}{y},\ v = x \Rightarrow \left(x;y\right) = \left(2;1\right)$.

Bài tập 651. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases},\ \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Đại học khối B năm 2009

ĐS: $\left(x;y\right) = \left\{\left(1;\dfrac{1}{3}\right),\left(3;1\right)\right\}$.

Bài tập 652. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4y - 1 \\ x + y = \dfrac{y}{x^2+1} + 2 \end{cases}$.

HD: Chia PT $\left(1\right)$ cho $y \neq 0$ và đặt $u = \dfrac{x^2+1}{y}, v = x + y \Rightarrow \left(x;y\right) = \left\{\left(1;2\right),\left(-2;5\right)\right\}$.

Bài tập 653. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 = x^3\left(9 - x^3\right) \\ x^2y + y^2 = 6x \end{cases}$.

HD: Đặt $u = \dfrac{y}{x}, v = x \Rightarrow \left(x;y\right) = \left\{\left(0;0\right),\left(1;2\right),\left(2;2\right)\right\}$.

Bài tập 654. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y\left(x+y\right)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$.

HD: Đặt $u = \dfrac{x^2+1}{y},\ v = x + y \Rightarrow \left(x;y\right) = \left(\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2};\dfrac{5\mp\sqrt{17}}{2}\right)$.

Bài tập 655. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)\left(1 + y^2 - 2y\right) = 16y \\ 2x^2y - 2xy + y^2 - 10y + 1 = 0 \end{cases}$.

HD: HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - x\right)^2.\dfrac{\left(y-1\right)^2}{y} = 16 \\ 2\left(x^2 - x\right) + \dfrac{\left(y-1\right)^2}{y} = 8 \end{cases}$ và đặt $u = \dfrac{\left(y-1\right)^2}{y},\ v = \left(x^2 - x\right)$.

Hệ có 8 nghiệm: $\left(x;y\right)=\left\{\left(-1;3\pm 2\sqrt{2}\right),\left(2;3\pm 2\sqrt{2}\right),\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5+4\sqrt{3}}}{2};4-\sqrt{5}\pm 2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)\right\}$.

Bài tập 656. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y^2+y^4+1=3y^2 \\ xy^2+x=2y \end{cases}$.

HD: $u=y+\dfrac{1}{y},\ \left|u\right|\ge 2,\ v=x\Rightarrow\left(x;y\right)=\left\{\left(1;1\right),\left(-1;-1\right)\right\}$.

Bài tập 657. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(2x+y\right)^2-5\left(4x^2-y^2\right)+6\left(2x-y\right)^2=0 \\ 2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3 \end{cases}$.

Đại học Xây Dựng năm 1997 – 1998

HD: $\left(x;y\right)=\left\{\left(\dfrac{3}{8},\dfrac{1}{4}\right),\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}\right)\right\}$. Chia hai vế PT $\left(1\right)$ cho $\left(2x-y\right)^2$.

Bài tập 658. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 27x^3y^3-9y^3=-125 \\ 45x^2y-6y^2+75x=0 \end{cases}$.

HD: Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases} \left(3x\right)^3+\left(\dfrac{5}{y}\right)^3=9 \\ 3x.\dfrac{5}{y}\left(3x+\dfrac{5}{y}\right)=6 \end{cases}\Rightarrow\left(x;y\right)=\left\{\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right),\left(\dfrac{2}{3};5\right)\right\}$.

Bài tập 659. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x-1\right)\left(y-1\right)\left(x+y-2\right)=6 \\ x^2+y^2-2x-2y-3=0 \end{cases}$.

HD: $u=x-1,\ v=y-1\Rightarrow\left(x;y\right)=\left\{\left(2;3\right),\left(3;2\right)\right\}$.

Bài tập 660. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3+3x^2+3y^2+3\left(x-y\right)=5 \\ \left(x+1\right)\left(y-1\right)\left(x-y+2\right)=2 \end{cases}$.

HD: Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases} \left(x+1\right)^3-\left(y-1\right)^3=7 \\ \left(x+1\right)\left(y-1\right)\left[\left(x+1\right)-\left(y-1\right)\right]=2 \end{cases}\Rightarrow\left(x;y\right)=\left\{\left(1;2\right),\left(-2;-1\right)\right\}$.

Bài tập 661. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ \left(x-1\right)^3+y^3=1 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right)=\left\{\left(1;1\right),\left(2;0\right)\right\}$.

Bài tập 662. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\left(x+y\right)=3\left(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6 \end{cases}$.

Đại học Dân lập Văn Hiến năm 1995 – 1996

HD: $u=\sqrt[3]{x},\ v=\sqrt[3]{y}\Rightarrow (x;y)=\{(8;64),(64;8)\}$.

Bài tập 663. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy-3x+y=0 \\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0 \end{cases}$.

HD: Chia (1) cho x, chia (2) cho x^2 và đặt $u=x+\dfrac{y}{x}, v=y\Rightarrow (x;y)=\{(0;0),(1;1)\}$.

Bài tập 664. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=3 \\ (x+y)(x^2+y^2)=15 \end{cases}$.

HD: $u=x^3+y^3,\ v=xy(x+y)\Rightarrow (x;y)=\{(1;2),(2;1)\}$.

Bài tập 665. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=8 \end{cases}$.

HD: $\begin{cases} u=\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}\geq 0 \\ v=\sqrt{x+y-3}\geq 0 \end{cases}\Rightarrow (x;y)=\left\{(3;5),(5;-1),\left(4\pm\sqrt{10};\ 3\mp\sqrt{10}\right)\right\}$.

Bài tập 666. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4(x^2+xy+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=\dfrac{85}{3} \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{13}{3} \end{cases}$.

HD: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+(x-y)^2=\dfrac{85}{3} \\ \left[(x+y)+\dfrac{1}{(x+y)}\right]+(x-y)=\dfrac{13}{3} \end{cases}\Rightarrow (x;y)=\left\{(2;1),\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

Bài tập 667. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1 \\ x^2+y^2-\dfrac{2x}{y}=4 \end{cases}$.

HD: $u=x^2+y^2-1,\ v=\dfrac{x}{y}\Rightarrow (x;y)=\{(1;-1),(-1;1),(3;1),(-3;-1)\}$.

Bài tập 668. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+2x^2+3y-15=0 \\ x^4+y^2-2x^2-4y-5=0 \end{cases}$.

HD: $u=x^2-1;\ v=y-2\Rightarrow (x;y)=\{(2;1),(-2;1),(0;5)\}$.

Bài tập 669. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1 \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22 \end{cases}$.

HD: Đặt $\begin{cases} u=x^2+y^2-1 \\ v=\dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \left(x;y\right)=\left\{\left(3;1\right),\left(-3;-1\right),\left(\dfrac{\pm 14\sqrt{106}}{53};\dfrac{\pm 14\sqrt{106}}{53}\right)\right\}$.

Bài tập 670. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x-1}-y\left(1+2\sqrt{2x-1}\right)=-8 \\ y^2+y\sqrt{2x-1}+2x=13 \end{cases}$.

HD: $u=\sqrt{2x-1}\ge 0,\ v=y \Rightarrow \left(x;y\right)=\left\{\left(\dfrac{5}{2};2\right),\left(\dfrac{43-3\sqrt{61}}{16};\dfrac{3+\sqrt{61}}{4}\right)\right\}$.

Bài tập 671. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-\sqrt{y+2}=\dfrac{3}{2} \\ y+2\left(x-2\right)\sqrt{x+2}=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$.

HD: $u=\sqrt{x+2}\ge 0;\ v=\sqrt{y+2}\ge 0 \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(2;\dfrac{7}{4}\right)$.

Bài tập 672. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2-x\left(y-1\right)+y^2=3y \\ x^2+xy-3y^2=x-2y \end{cases}$.

HD: $x=ty \Rightarrow \left(x;y\right)=\left\{\left(0;0\right),\left(1;1\right),\left(-1;1\right),\left(\dfrac{7}{43};\dfrac{3}{43}\right)\right\}$.

Bài tập 673. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2-\sqrt{x^2y^4+2xy^2-y^4+1}=2\left(3-\sqrt{2}-x\right)y^2 \\ \sqrt{x-y^2}+x=3 \end{cases}$.

HD: $u=xy^2+1,\ v=y^2 \Rightarrow \left(x;y\right)=\left\{\left(2;\pm 1\right),\left(4-\sqrt{2};\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Bài tập 674. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=1+xy \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{cases}$.

HD: $x^2-xy+y^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=1 \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{x}{y+1} \\ v=\dfrac{y}{x+1} \end{cases} \Rightarrow \left(x;y\right)=\left\{\left(0;1\right),\left(1;0\right)\right\}$.

Bài tập 675. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ \dfrac{4}{5y+9}+\dfrac{4}{x+6}+\dfrac{1}{1+\left(x+1\right)\left(y+2\right)}=\dfrac{x+1}{2} \end{cases}$.

HD: $u=x+1,\ v=y+1 \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài tập 676. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2=1 \\ x^3y-x^2+xy=-1 \end{cases}$.

HD: $u=x^3y,\ v=x^2-xy \Rightarrow \left(u;v\right)=\left\{\left(-3;-2\right),\left(0;1\right)\right\}$.

Bài tập 677. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x^3y-xy^2+xy-y=1 \\ x^4+y^2-xy\left(2x-1\right)=1 \end{cases}$.

HD: $u=x^2-x,\ v=xy \Rightarrow \left(x;y\right)=\left\{\left(1;0\right),\left(-1;0\right),\left(0;-1\right),\left(1;1\right),\left(-1;3\right)\right\}$.

Bài tập 678. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2-1} \\ x^2+y^2-xy=1 \end{cases}$.

HD: $u=\sqrt{x^2+1}\geq 1,\ v=\sqrt{y^2-1}\geq 0 \Rightarrow xy=ab... \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(\pm\sqrt{2};\pm 1\right)$.

Bài tập 679. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x+\dfrac{1}{y}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=4 \\ \dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{1}{y^3}=4-x^3 \end{cases}$.

HD: $u=x+\dfrac{1}{y},\ v=\dfrac{x}{y} \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài tập 680. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-x-y=1 \\ 4x^3-12x^2+9x=-y^3+6y+7 \end{cases}$.

HSG Tp. Hồ Chí Minh vòng 1 – Toán 12 – Ngày 18/10/2012

HD: Đặt $\begin{cases} u=x-1 \\ v=y \end{cases} \Rightarrow \left(x;y\right)=\left\{\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right),\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{4};\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 681. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x-y\right)^2=1-x^2y^2 \\ x\left(xy+y+1\right)=y\left(xy+1\right)+1 \end{cases}$.

HD: $\begin{cases} \left[\left(x-y\right)+xy\right]^2=1-2xy\left(x-y\right) \\ xy\left(x-y\right)+xy+\left(x-y\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\left(x-y\right)+xy \\ v=xy\left(x-y\right) \end{cases} \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(0;-1\right),\left(1;0\right),\left(\pm 1;\pm 1\right)$.

Bài tập 682. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2\left(1+y^2\right)=2 \\ 1+x^2y^2+xy=3x^2 \end{cases}$.

HD: Đặt $u=\dfrac{1}{x};\ v=y\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(\pm1;\pm1\right),\left(\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4};\mp\dfrac{5\sqrt{7}}{7}\right)$.

Bài tập 683. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3x^3y^3=2x^3+y^3\\ x+y=2xy^3\end{cases}$.

HD: $u=\dfrac{1}{x},\ v=\dfrac{1}{y}\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(1;1\right),\left(\dfrac{\left(1\pm\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2\pm2\sqrt{3}}}{2};\dfrac{\sqrt[3]{2\pm2\sqrt{3}}}{2}\right)$.

Bài tập 684. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2y+x^2+2y-22=0\\ x^4-4x^2+y^2-6y+9=0\end{cases}$.

HD: Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\left(y+1\right)+2y-22=0\\ \left(x^2-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=4\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}u=x^2-2\\ v=y-3\end{cases}\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(\pm2;3\right),\left(\pm\sqrt{2};5\right)$.

Bài tập 685. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(2x-1\right)^2+4\left(y-1\right)^2=22\\ xy\left(x-1\right)\left(y-2\right)=1\end{cases}$

HD: Đặt $\begin{cases}u=4x^2-4x\\ v=y^2-2y\end{cases}\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2};1\pm\sqrt{5}\right),\left(\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2};\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài tập 686. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+8xy=0\\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

HD: $u=x+\dfrac{1}{x};\ v=y+\dfrac{1}{y}\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(2\pm\sqrt{3};-1\right),\left(-1;2\pm\sqrt{3}\right)$.

Bài tập 687. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x+1\right)^2\left(y+1\right)^2=27xy\\ \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=10xy\end{cases}$.

HD: Đặt $\begin{cases}u=x+\dfrac{1}{x}\\ v=y+\dfrac{1}{y}\end{cases}\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{2};2\pm\sqrt{3}\right),\left(2;2\pm\sqrt{3}\right),\left(2\pm\sqrt{3};\dfrac{1}{2}\right),\left(2\pm\sqrt{3};2\right)$.

Bài tập 688. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3+5y^3-2xy=32\\ 2x^3+3y^3=8\end{cases}$.

HD: Đặt $t=xy\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(-2;2\right)$.

Bài tập 689. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}5x^3+2y^3=7xy-14\\ 2x^3-3y^3=2-xy\end{cases}$.

HD: $x^3 = xy - 2,\ y^3 = xy - 2 \Rightarrow (x;y) = (-1;-1)$.

Bài tập 690. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + 2x^2y = 3 \\ x^2 + y^2 + y = 3 \end{cases}$.

HD: Cộng vế theo vế $(x^2+y)^2 + (x^2+y) - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y = 2 \\ x^2 + y = -3 \end{array}\right.$.

Bài tập 691. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y)^3 + 4xy - 3 = 0 \\ (x+y)^4 + 2y^2 + x + 1 = 2x^2 + 4xy + 3y \end{cases}$.

HD: Đặt $t = x + y$, từ $(1) \Rightarrow t \ge 1$.

Từ $(2) \Rightarrow t(t^3 - 2t + 1) + (2y-1)^2 = 0 \Rightarrow (x;y) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài tập 692. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 + 4xy + y - 2x = 0 \\ y^4 + 8xy^2 + 4x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases}$.

HD: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y - \dfrac{2x}{y} + 4x + 1 = 0 \\ y^2 + \dfrac{4x^2}{y^2} + 8x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = (-1;1),(-1;2)$.

Bài tập 693. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^3 = 2y^2 \\ x + y^3 = 2y \end{cases}$.

HD: Với $x, y \ne 0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + y = 2 \\ \dfrac{x}{y} + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = (0;0),(1;1),\left(-1;\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài tập 694. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (xy+1)^3 = 2y^3(9 - 5xy) \\ xy(5y-1) = 1 + 3y \end{cases}$.

HD: Với $y \ne 0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^3 = 2(9 - 5xy) \\ x + \dfrac{1}{y} = 5xy - 3 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = (1;1)$.

Bài tập 695. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$.

<u>HD</u>: Với $x \neq 0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{y}{x} = 2y - 1 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{x^2} = 4y - 3 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = (0;0),(1;2),(2;2).$

<u>Bài tập 696.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right)^2 = 8 \\ \left(x^3 + y^3\right)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right)^3 = 16 \end{cases}.$

<u>HD</u>: Đặt $\begin{cases} u = x + \dfrac{1}{x} \\ v = y + \dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow (x;y) = (2;2),\left(\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{3}}; \sqrt{3} - 1 \mp \sqrt{2\sqrt{3}}\right).$

<u>Bài tập 697.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y^2 - x} = 2 \\ x^2 + y^2 - x - y = 2 \end{cases}.$

<u>HD</u>: $u = \sqrt{x^2 - y} \geq 0, v = \sqrt{y^2 - x} \geq 0 \Rightarrow (x;y) = (0;-1),(-1;0),\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$

<u>Bài tập 698.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right) = 144 \\ \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = y \end{cases}.$

<u>ĐS</u>: $(x;y) = \left(2\sqrt{5};4\right),\left(-2\sqrt{5};4\right),\left(2\sqrt{3};0\right),\left(-2\sqrt{3};0\right).$

<u>Bài tập 699.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 + 3} + x + y = 5 \\ \sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{y^2 + 3} - x - y = 2 \end{cases}.$

<u>HD</u>: Đặt $u = \sqrt{x^2 + 2} + x,\ v = \sqrt{y^2 + 3} + y \Rightarrow$ Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ \dfrac{2}{u} + \dfrac{3}{v} = 2 \end{cases}.$

<u>Bài tập 700.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x - 2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x - 2y}} = 2 \\ 4y^2 - 1 = 3y(x - 1) \end{cases}.$

<u>ĐS</u>: $(x;y) = (2;1),\left(1;\dfrac{1}{2}\right).$

<u>Bài tập 701.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{y - 1} = 6 \\ \sqrt{x^2 + 2x + y} + 2(x + 1)\sqrt{y - 1} = 29 \end{cases}.$

HD: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+\sqrt{y-1}=7 \\ \sqrt{(x+1)^2+y-1}+2(x+1)\sqrt{y-1}=29 \end{cases} \Rightarrow (x;y)=(3;10),(2;17)$.

Bài tập 702. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-xy=3 \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=4 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y)=(\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{3})$.

Bài tập 703. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}+2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}}=1 \\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y)=(7;-8),(1;7),\left(\dfrac{49}{64};\dfrac{41}{8}\right)$.

Bài tập 704. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=3\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=4\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} \end{cases}$.

HD: $u=\sqrt{x+y}\ge 0,\ v=\sqrt{x-y}\Rightarrow (x;y)=(10;6)$.

D – GIẢI HỆ BẰNG BẤT ĐẲNG THỨC



Thí dụ 186. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4 & (1) \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 4 & (2) \end{cases}$

Đại học An Ninh Hà Nội khối D năm 1999

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \neq 0;\ y \neq 0$.
- Ta có: $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2} \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{x^2.\dfrac{1}{x^2}} = 2 \\ y^2 + \dfrac{1}{y^2} \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{y^2.\dfrac{1}{y^2}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} + y^2 + \dfrac{1}{y^2} \geq 4$.

  Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{x^2} \\ y^2 = \dfrac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ y^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 1$.
- Thay $x = y = \pm 1$ vào (1), ta chỉ nhận $x = y = 1$.
- Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;1)$.

Thí dụ 187. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{1+x} + \sqrt{6-y} = \sqrt{14} & (1) \\ \sqrt{1+y} + \sqrt{6-x} = \sqrt{14} & (2) \end{cases}$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-1 \leq x, y \leq 6$.

$(1) + (2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{6-x}\right) + \left(\sqrt{1+y} + \sqrt{6-y}\right) = 2\sqrt{14} \quad (3)$

- Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki:

  $1.\sqrt{1+x} + 1.\sqrt{6-x} \leq \sqrt{\left(1^2 + 1^2\right)\left[(1+x) + (6-x)\right]} = \sqrt{14} \quad (4)$

  Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{1+x}}{1} = \dfrac{\sqrt{6-x}}{1} \Leftrightarrow 1 + x = 6 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

  $1.\sqrt{1+y} + 1.\sqrt{6-y} \leq \sqrt{\left(1^2 + 1^2\right)\left[(1+y) + (6-y)\right]} = \sqrt{14} \quad (5)$

  Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{1+y}}{1} = \dfrac{\sqrt{6-y}}{1} \Leftrightarrow 1 + y = 6 - y \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{2}$.

$(4) + (5) \Rightarrow \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{6-x}\right) + \left(\sqrt{1+y} + \sqrt{6-y}\right) \leq 2\sqrt{14} \quad (6)$

Dấu " = " trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu " = " trong $(4),(5)$ đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{5}{2}$.

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

<u>Thí dụ 188.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} - y^2 = 2\sqrt{2} & (1) \\ \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt{6-x} + 2\sqrt{2}y = 8 + \sqrt{2} & (2) \end{cases}$

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 387 tháng 7 năm 2009

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $0 \le x \le 6$.
- Lấy $(1)+(2) \Rightarrow \left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right) + \left(\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x}\right) = \left(y - \sqrt{2}\right)^2 + 6 + 3\sqrt{2}$.
- Ta có: $VP = \left(y-\sqrt{2}\right)^2 + 6 + 3\sqrt{2} \ge 6 + 3\sqrt{2}$. Dấu " = " xảy ra khi $y = \sqrt{2}$ $\quad(3)$
- Ta lại có:

$$\left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right) = \left(1.\sqrt{2x} + \sqrt{2}.\sqrt{12-2x}\right)^2 \overset{\text{B.C.S}}{\le} \left[1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2\right]\left(2x + 12 - 2x\right) = 36$$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right) \le 6$ và dấu " = " xảy ra khi $x = 2$ $\quad(4)$

$$\left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right)^2 \overset{\text{B.C.S}}{\le} (1+2)\left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right) \le 18$$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right) \le 3\sqrt{2}$ và dấu " = " xảy ra khi $x = 2$ $\quad(5)$

- Lấy $(4)+(5) \Rightarrow VT = \left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right) + \left(\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x}\right) \le 6 + 3\sqrt{2}$ và dấu " = " xảy ra khi $x = 2$.
- Từ $(3),(4),(5) \Rightarrow$ nghiệm hệ là $(x;y) = \left(2;\sqrt{2}\right)$.

<u>Thí dụ 189.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y & (1) \\ y + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x & (2) \end{cases}$

Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 379 tháng 1 năm 2009

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Lấy $(1)+(2)$, ta được: $\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = x^2 + y^2$ $\quad(3)$
- Ta có: $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(x-1)^2 + 8} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} \le \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} \le \frac{2\left|xy\right|}{2} \Leftrightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} \le \left|xy\right| \quad (4)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=0 \end{array}\right.$.

- Tương tự, ta chứng minh được: $\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} \le \left|xy\right| \quad (5)$

  Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=0 \end{array}\right.$.

- Lấy $(4)+(5) \Rightarrow VT = \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} \le 2\left|xy\right| \quad (6)$

  Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=0 \end{array}\right.$.

- Theo bất đẳng thức Cauchy: $x^2+y^2 \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 2\sqrt{x^2y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 \ge 2\left|xy\right| \quad (7)$

  Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=0 \end{array}\right.$.

- Từ $(3),(6),(7) \Rightarrow$ Nghiệm hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{(0;0),(1;1)\right\}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 705. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2y^2-y+1}=2 \\ \sqrt{2y^2+y+1}+\sqrt{2x^2-x+1}=2 \end{cases}$.

HD: $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-x+1} \ge 2\sqrt[4]{\left(2x^2+x+1\right)\left(2x^2-x+1\right)} \ge 2 \Rightarrow x=y=0$.

Bài tập 706. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x}=\sqrt{2xy} \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy \end{cases}$.

HD: $x\sqrt{y-1}=\sqrt{x(xy-x)} \le \dfrac{x+xy-x}{2} \Rightarrow (x;y)=(2;2)$.

Bài tập 707. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+x^2(y-1)-5(x+y)=5 \\ 3\sqrt{1+2x^2}+2\sqrt{40+9y^2}=5\sqrt{11} \end{cases}$.

HD: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=5 \\ x+y=1 \end{array}\right.$. Với $x+y=1$, bất đẳng thức véctơ ta có:

$$3\sqrt{1+2x^2}+2\sqrt{40+9y^2}=\sqrt{9+9x^2+9x^2}+\sqrt{144+16+36y^2}$$

$$\geq \sqrt{225+\left(3x+4\right)^2+\left(3x+6y\right)^2} \geq 5\sqrt{11}.$$

Đáp số: $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Bài tập 708. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3-6x+5}=\left(x^3+4\right)\left(x^2+2x-6\right) \\ x+\dfrac{2}{x}\geq 1+\dfrac{2}{x^2} \end{cases}$.

ĐS: $x=2$.

Bài tập 709. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x\left(1-2x\right)}+\sqrt{y\left(1-2y\right)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{9+\sqrt{73}}{36};\dfrac{9+\sqrt{73}}{36}\right),\left(\dfrac{9-\sqrt{73}}{36};\dfrac{9-\sqrt{73}}{36}\right)$.

Bài tập 710. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y+1=2\sqrt{x}+3\sqrt{y+1} \\ -x+y+2=\sqrt{\dfrac{2\left(x+y\right)}{x+3y+1}} \end{cases}$.

HD: $\left(2\right)\Leftrightarrow 1-\left(x-y+1\right)=\sqrt{1+\dfrac{x-y+1}{x+3y+1}}\Rightarrow x-y-1=0$.

$\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(\dfrac{41+5\sqrt{57}}{32};\dfrac{9+5\sqrt{57}}{32}\right),\left(\dfrac{41-5\sqrt{57}}{32};\dfrac{9-5\sqrt{57}}{32}\right)$.

Bài tập 711. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy\left(x+y\right)=x^2-xy+y^2 \\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=16 \end{cases}$.

HD: Đặt $a=\dfrac{1}{x},\ b=\dfrac{1}{y}\Rightarrow\left(x;y\right)=\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 712. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 7x^2-14x+3y^2+10=0 \end{cases}$.

HD: $\left(1\right)\Rightarrow y^2=\dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1\Rightarrow y^3\geq -1 \ldots \left(x;y\right)=\left(1;-1\right)$.

Bài tập 713. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y=-x^3+3x+4 \\ x=2y^3-6y-2 \end{cases}$.

HD: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1)^2 = 2-y \\ 2(y-2)(y+1)^2 = x-2 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = (2;2)$.

Bài tập 714. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 - x^3 = 7 \\ x^3 - y^2 + x = -2 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = (1;2)$.

Bài tập 715. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3+2x^2y-x^4y} + x^4(1-2x^2) = y^4 \\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2} = x^3(x^3-x+2y^2) \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = (1;1)$.

Bài tập 716. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y = 24 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = (16;3)$.

Bài tập 717. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + y^4 = 2 \\ x^3 - 2x^2 + 2x = y^2 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = (1;1), (1;-1)$.

Bài tập 718. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = \sqrt[3]{2014} \\ \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}} + \dfrac{1}{\sqrt{y+3x}}\right) = 2 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{2014}}{2}; \dfrac{\sqrt[3]{2014}}{2}\right)$.

Bài tập 719. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x+y) = 2\left|xy+1\right| \\ 9(x^3+y^3) = \left|x^3y^3+1\right| \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

E – GIẢI HỆ BẰNG LƯỢNG GIÁC HÓA & SỐ PHỨC HÓA



I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Lượng giác hóa

Xem lại phần lượng giác hóa của phương trình.

2/ Số phức hóa

— Dựa vào các phép biến đổi số phức $z = x + iy,\ \left(x; y \in \mathbb{R}\right)$:

- $\bar{z} = x - y.i,\ \ \left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2},...$
- $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy.i,\ \ \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xy.i$.
- $z^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)i$.
- $z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4i\left(x^3y - y^3x\right)$.
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x + yi} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2},\ \left(z \neq 0\right)$.
- $z.\bar{z} = \left(x + yi\right)\left(x - yi\right) = x^2 - yi^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{i}{z} = \dfrac{xi + y}{x^2 + y^2}}$.

— Dựa vào dạng lượng giác của số phức và hai số phức bằng nhau (thực $=$ thực và ảo $=$ ảo).

— Dựa vào sự tương đương của một phương trình nghiệm phức $f\left(z\right) = 0$ với một hệ phương trình hai ẩn $x, y \in \mathbb{R}$. Nghĩa là giải phương trình $f\left(z\right) = 0$ và tìm được nghiệm $z_1 = x_1 + y_1 i,\ \ z_2 = x_2 + y_2 i,...$ thì nghiệm hệ ban đầu là $\left(x; y\right) = \left\{\left(x_1; y_1\right), \left(x_2; y_2\right), ...\right\}$.

— Dựa vào CT Moivre: $z^n = r.\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}.\left(\cos\dfrac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + k2\pi}{n}\right)$.

Chẳng hạn như: $z^3 = -1 + \sqrt{3}.i \Leftrightarrow z^3 = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}.i\right) \Leftrightarrow z^3 = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right) \vee z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right) \vee z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

II – CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 190. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{1 - y^2} = \dfrac{1}{4} \\ y\sqrt{1 - x^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \left(*\right)$

- Điều kiện: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$.

- Đặt $x = \sin u,\ y = \cos v$ với $u, v \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 u} = \sin u \\ \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \sin^2 v} = \sin v \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u \sin v = \dfrac{1}{4} \\ \cos v \sin u = \dfrac{1}{4} \end{cases} \overset{+}{\underset{-}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \sin(u + v) = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \sin(u - v) = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow u - v = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và $u,\ v \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow u = v$.

- Thay $u = v$ vào $(1) \Rightarrow \sin 2u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \\ u = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right.$.

- Vì $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow u = \frac{\pi}{12} \ \vee\ u = \frac{5\pi}{12}$.

$\Rightarrow (x; y) = \left(\cos\frac{\pi}{12}; \cos\frac{\pi}{12}\right), \left(\cos\frac{5\pi}{12}; \cos\frac{5\pi}{12}\right)$ với $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Thí dụ 191. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x = \dfrac{2y}{1 - y^2} \\ y = \dfrac{2x}{1 - x^2} \end{cases} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x, y \neq \pm 1$.

- Đặt $x = \tan u,\ y = \tan v$ thì $u, v \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{4}\right\}$.

- Ta có $\frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u} = \tan 2u$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan u = \tan 2v \\ \tan v = \tan 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v + k\pi \\ v = 2u + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\dfrac{(k + 2m)\pi}{3} \\ v = -\dfrac{(m + 2k)\pi}{3} \end{cases}.$$

- Vì $u, v \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{4}\right\} \Rightarrow (k; m) = \left\{(0; 0), (1; -1), (-1; 1)\right\}$.

$\Rightarrow (x; y) = \left\{(0; 0), (\sqrt{3}; -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}; \sqrt{3})\right\}$.

Thí dụ 192. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y^2 - 2y = 0 & (1) \\ 36\left(x\sqrt{x} + 3y^3\right) - 27\left(4y^2 - y\right) + \left(2\sqrt{3} - 9\right)\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$

Olympic 30 – 04 lần XIX ngày 06/04/2013 Toán 11 – THPT chuyên Lê Hồng Phong

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \geq 0$.

$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x}\right)^2 + \left(3y-1\right)^2 = 1$.

- Đặt $\begin{cases} \sqrt{3x} = \sin t \\ 3y - 1 = \cos t \\ t \in \left[0;\pi\right] \end{cases}$. Lúc đó:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\ 4\sqrt{3}\sin^3 t + 4\left(1+\cos t\right)^3 - 12\left(1+\cos t\right)^2 + 9\left(1+\cos t\right) + \left(2-3\sqrt{3}\right)\sin t = 1 \\ t \in \left[0;\pi\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3 t - 3\cos t + 4\sqrt{3}\sin^3 t - 3\sqrt{3}\sin t + 2\sin t = 0 \\ t \in \left[0;\pi\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3t - \sqrt{3}\sin 3t + 2\sin t = 0 \\ t \in \left[0;\pi\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3t - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin t \\ t \in \left[0;\pi\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \ \vee \ t = \dfrac{7\pi}{24} + \dfrac{m\pi}{2}, \ \left(k, m \in \mathbb{Z}\right) \\ t \in \left[0;\pi\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}\right\}.$$

- $t = \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{12} \Rightarrow y = \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{12}}{3} = \dfrac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}$.

- $t = \dfrac{7\pi}{24} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}\sin^2\dfrac{7\pi}{24} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1-\cos\dfrac{7\pi}{12}}{2} = \dfrac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{24} \Rightarrow y = \dfrac{4+\sqrt{2\left(4+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}}{12}$.

- $t = \dfrac{19\pi}{24} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}\sin^2\dfrac{19\pi}{24} \Rightarrow x = \dfrac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{24} \Rightarrow y = \dfrac{4-\sqrt{2\left(4-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}}{12}$.

Thí dụ 193. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 5y = xy + 2 \\ x^2 + 4y + 21 = y^2 + 10x \end{cases} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2i\left(xy - 2x - 5y + 2\right) = 0 \\ x^2 - y^2 - 10x + 4y + 21 = 0 \end{cases}$. Gọi $z = x + iy, \ \left(x; y \in \mathbb{R}\right)$.

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 10x + 4y + 21 + 2i\left(xy - 2x - 5y + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi - 10\left(x + yi\right) - 4i\left(x + yi\right) + 21 + 4i = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 10z - 4iz + 21 + 4i = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 2\left(5 + 2i\right)z + 21 + 4i = 0 \quad \left(1\right)$

- Ta có: $\Delta' = \left(5 + 2i\right)^2 - \left(21 + 4i\right) = 16i = 8\left(1 + i\right)^2$.

$\Rightarrow z = \left(5 + 2\sqrt{2}\right) + \left(2 + 2\sqrt{2}\right)i \ \vee \ z = \left(5 - 2\sqrt{2}\right) + \left(2 - 2\sqrt{2}\right)i$.

- Vậy hệ có hai nghiệm: $\left(x; y\right) = \left\{\left(5 + 2\sqrt{2}; \ 2 + 2\sqrt{2}\right); \left(5 - 2\sqrt{2}; \ 2 - 2\sqrt{2}\right)\right\}$.

Thí dụ 194. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x^2 + y^2 \neq 0$. Gọi $z = x + iy, \ \left(x; y \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}; \ \dfrac{xi + y}{x^2 + y^2} = \dfrac{i}{z}$.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ yi - \dfrac{\left(x + 3y\right)i}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} + yi - \dfrac{\left(x + 3y\right)i}{x^2 + y^2} = 3$

$\Leftrightarrow \left(x + yi\right) + \dfrac{3x - y - xi - 3yi}{x^2 + y^2} = 3$

$\Leftrightarrow \left(x + yi\right) + \dfrac{3\left(x - yi\right) - \left(xi + y\right)}{x^2 + y^2} = 3$

$\Leftrightarrow z + \dfrac{3 - i}{z} = 3 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 - i = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + i \\ z = 1 - i \end{array}\right.$.

- Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $\left(x; y\right) = \left\{\left(2; 1\right), \left(1; -1\right)\right\}$.

Thí dụ 195. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{78y}{x^2 + y^2} = 20 \\ y + \dfrac{78x}{x^2 + y^2} = 15 \end{cases} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x^2+y^2\neq 0$. Gọi $z=x+iy,\ \left(x;y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2};\ \dfrac{i}{z}=\dfrac{xi+y}{x^2+y^2}$.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{78y}{x^2+y^2}=20\\ yi+\dfrac{78xi}{x^2+y^2}=15i\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{78y}{x^2+y^2}+yi+\frac{78xi}{x^2+y^2}=20+15i$$

$$\Leftrightarrow \left(x+yi\right)+78.\boxed{\frac{xi+y}{x^2+y^2}}=20+15i$$

$$\Leftrightarrow z+78.\boxed{\frac{i}{z}}=20+15i$$

$$\Leftrightarrow z^2-\left(20+15i\right)z+78i=0$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{20+15i\pm\left(16+9i\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=18+12i\ \vee\ z=2+3i.$$

- Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: $\left(x;y\right)=\left\{\left(2;3\right),\left(18;12\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 196.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-3xy^2=-1\\ y^3-3x^2y=-\sqrt{3}\end{cases}\ \left(*\right)$

✍ **<u>Nhận xét</u>**: Đây là hệ phương trình đẳng cấp bậc ba. Tuy nhiên, nếu giải bằng phương pháp thông thường, sẽ dẫn ta đến giải phương trình bậc ba: $\sqrt{3}.t^3+3t^2-3\sqrt{3}t-1=0$ và phương trình này không có nghiệm đặc biệt ! Nhưng ta để ý rằng: nếu xét số phức $z=x+iy,\ \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$ thì $z^3=x^3-3xy^2+\left(3x^2y-y^3\right)i$ và ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Gọi $z=x+iy,\ \left(x;y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow z^3=x^3-3xy^2+\left(3x^2y-y^3\right)i$.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3xy^2=-1\\ \left(3x^2y-y^3\right)i=i\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow x^3-3xy^2+\left(3x^2y-y^3\right)i=-1+i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow z^3=-1+\sqrt{3}.i\Leftrightarrow z^3=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.i\right)\Leftrightarrow z^3=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&z=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)\\&z=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)\end{aligned}\right.\vee\ z=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

$$\Rightarrow\left(x;y\right)=\left\{\left(\sqrt[3]{2}\cos\frac{2\pi}{9};\sqrt[3]{2}\sin\frac{2\pi}{9}\right);\left(\sqrt[3]{2}\cos\frac{8\pi}{9};\sqrt[3]{2}\sin\frac{8\pi}{9}\right);\left(\sqrt[3]{2}\cos\frac{14\pi}{9};\sqrt[3]{2}\sin\frac{14\pi}{9}\right)\right\}.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 720. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2y}{1+y^2} = x \\ \dfrac{2x}{1+x^2} = y \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \{(0;0),(1;1)\}$.

Bài tập 721. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{1-y^2} = 1 \\ y + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{3} \end{cases}$.

HD: Đặt $\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \cos\beta \end{cases}$; $\alpha,\beta \in [0;\pi] \Rightarrow$ Hệ $\Rightarrow (x;y) = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài tập 722. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ (1-x)(1+y) = 2 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = (0;1)$.

Bài tập 723. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3} \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = (\sin 65^\circ;\cos 65^\circ),(\sin 185^\circ;\cos 185^\circ),(\sin 305^\circ;\cos 305^\circ),(\sin 85^\circ;\cos 85^\circ),$

$(-\sin 35^\circ;\cos 35^\circ),(\sin 205^\circ;\cos 205^\circ)$.

Bài tập 724. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x = \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+y}}} \\ y = \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} \end{cases}$.

HD: CM được $x = y \in (0;2)$. Đặt $x = 2\cos t, t \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$2\cos t = \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos t}}} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{t}{8}\right)$.

$\Rightarrow (x;y) = \left(2\cos\dfrac{2\pi}{7};2\cos\dfrac{2\pi}{7}\right),\left(2\cos\dfrac{2\pi}{9};2\cos\dfrac{2\pi}{9}\right)$.

Bài tập 725. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ 16x^5 - 20x^3 + 5x + 512y^5 - 160y^3 + 10y + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$.

Đề nghị Olympic 30 – 04 – 2011

ĐS: $(x;y) = \left(\sin\dfrac{\pi}{4};\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{4}\right),\left(\sin\dfrac{13\pi}{20};\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{13\pi}{20}\right),\left(\sin\dfrac{21\pi}{20};\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{21\pi}{20}\right),$

$$\left(\sin\frac{29\pi}{20};\frac{1}{2}\cos\frac{29\pi}{20}\right),\left(\sin\frac{37\pi}{20};\frac{1}{2}\cos\frac{37\pi}{20}\right).$$

Bài tập 726. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+2x+2x^3=3x^2y \\ x^2+1=y^2 \end{cases}$.

HD: Đặt $x=\tan\varphi$ thì từ $(1)\Rightarrow y=\dfrac{-2x\left(x^2+1\right)}{1-3x^2}$ nên $x-y=\tan 3\varphi$.

$(2)\Leftrightarrow x=\dfrac{x-y}{2}-\dfrac{1}{2(x-y)}=-\cot 6\varphi$ nên $\tan\varphi=-\cot 6\varphi\Leftrightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{10}+k\dfrac{\pi}{5}$.

Đáp số: $\begin{cases} x=\tan\varphi \\ y=\tan\varphi-\tan 3\varphi \end{cases}$ với $\varphi\in\left\{-\dfrac{3\pi}{10};-\dfrac{\pi}{10};\dfrac{\pi}{10};\dfrac{3\pi}{10}\right\}$.

Bài tập 727. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x-y^2=5 \\ 2xy+y=55 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y)=\left\{(5;5),(-6;-5)\right\}$.

Bài tập 728. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{16x-11y}{x^2+y^2}=7 \\ y-\dfrac{11x+16y}{x^2+y^2}=-1 \end{cases}$.

HD: $(x;y)=\left\{(2;-3),(5;2)\right\}$.

Bài tập 729. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{5x+7\sqrt{5}y}{x^2+y^2}=7 \\ y+\dfrac{7\sqrt{5}x-5y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y)=\left\{(7;-\sqrt{5}),(0;\sqrt{5})\right\}$.

Bài tập 730. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-6x^2y^2+y^4=\sqrt{3} \\ x^3y-y^3x=\dfrac{1}{4} \end{cases}$.

ĐS: $\omega=\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4}\right)$, $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

Bài tập 731. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$.

1996 Vietnamese Mathematical Olympiad

HD: $\begin{cases} u = \sqrt{x} \geq 0 \\ v = \sqrt{y} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2} \right) \right\}.$

Bài tập 732. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{12}{3x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{y}\left(1 + \dfrac{12}{3x+y}\right) = 6 \end{cases}.$

2007 Vietnamese Mathematical Olympiad

HD: $\begin{cases} \sqrt{3x} = u \geq 0 \\ \sqrt{y} = v \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \left(4 + 2\sqrt{3};\ 12 + 6\sqrt{3}\right).$

Bài tập 733. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1 + \dfrac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{xy}\left(1 - \dfrac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}.$

ĐS: $(x, y) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}} \right)^2; \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2} \right)^2 \right).$

Bài tập 734. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\left(x^2 - 3y^2\right) = -2\sqrt{3} \\ y\left(3x^2 - y^2\right) = 2 \end{cases}.$

Bài tập 735. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 4 \\ x^3y - y^3x = -\sqrt{3} \end{cases}.$

Bài tập 736. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\left(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4\right) = \sqrt{3} \\ y\left(y^4 - 10x^2y^2 + 5x^4\right) = -1 \end{cases}.$

Bài tập 737. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{10x}\left(1 + \dfrac{3}{5x+y}\right) = 3 \\ \sqrt{y}\left(1 - \dfrac{3}{5x+y}\right) = -1 \end{cases}.$

HD: $\begin{cases} u = \sqrt{5x} > 0 \\ v = \sqrt{y} > 0 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \left(\frac{1}{10}; 1\right).$

Bài tập 738. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}\left(2 + \dfrac{7}{2x+5y}\right) = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{5y}\left(2 - \dfrac{7}{2x+5y}\right) = \sqrt{3} \end{cases}.$

Bài tập 739. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}\left(2-\dfrac{15}{x+2y}\right)=2+\sqrt{3} \\ \sqrt{y}\left(2+\dfrac{15}{x+2y}\right)=3\left(\sqrt{3}-1\right) \end{cases}$.

Bài tập 740. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{9x+\sqrt{10}y}{x^2+y^2}=3\sqrt{2} \\ y+\dfrac{\sqrt{10}x-9y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$.

Bài tập 741. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}\left(3+\dfrac{5}{42x+y}\right)=2 \\ \sqrt{2y}\left(3-\dfrac{5}{42x+y}\right)=4 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{5+2\sqrt{6}}{27};\dfrac{5+2\sqrt{6}}{9}\right)$.

Bài tập 742. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{3}\left(1+\dfrac{6}{x+y}\right)=\sqrt{2} \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{6}{x+y}\right)=1 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right)=\left\{\left(\sqrt{2};-1\right),\left(2\sqrt{2};2\right)\right\}$.

Bài tập 743. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3-6xy^2=5 \\ 6x^2y-2y^3=5\sqrt{3} \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right)=\left(\sqrt[3]{5}\cos\dfrac{\pi}{9};\sqrt[3]{5}\sin\dfrac{\pi}{9}\right),\left(\sqrt[3]{5}\cos\dfrac{7\pi}{9};\sqrt[3]{5}\sin\dfrac{7\pi}{9}\right),\left(\sqrt[3]{5}\cos\dfrac{13\pi}{9};\sqrt[3]{5}\sin\dfrac{13\pi}{9}\right)$.

Bài tập 744. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3xy^2=1 \\ 3x^2y-y^3=1 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right)=\left(\sqrt[6]{2}\cos\dfrac{\pi}{12};\sqrt[6]{2}\sin\dfrac{\pi}{12}\right),\left(\sqrt[6]{2}\cos\dfrac{3\pi}{4};\sqrt[6]{2}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right),\left(\sqrt[6]{2}\cos\dfrac{17\pi}{12};\sqrt[6]{2}\sin\dfrac{17\pi}{12}\right)$.

F – GIẢI HỆ BẰNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



Xem lại phương pháp giải phương trình bằng phương pháp hàm số

<u>Thí dụ 197.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 & (1) \\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4 & (2) \end{cases}$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $-\dfrac{3}{2}\le x,\ y\le 4$.
- Lấy (1) trừ (2) ta được: $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=\sqrt{2y+3}-\sqrt{4-y}\quad (3)$.
- Xét hàm số: $f(t)=\sqrt{2t+3}-\sqrt{4-t}$ liên tục trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};4\right]$.

  $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t+3}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-t}}>0;\ \forall x\in\left[-\dfrac{3}{2};4\right]\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $\left(-\dfrac{3}{2};4\right)$.

  $\Rightarrow (3)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.
- Thay $x=y$ vào (1). Giải phương trình ta tìm được: $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{11}{9} \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=\dfrac{11}{9} \end{array}\right.$.
- Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=\left\{(3;3),\left(\dfrac{11}{9};\dfrac{11}{9}\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 198.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x=y^3-3y & (1) \\ x^6+y^6=1 & (2) \end{cases}$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Từ (1) và $(2)\Rightarrow$ Điều kiện: $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -1\le y\le 1 \end{cases}$.
- Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ liên tục và xác định trên đoạn $[-1;1]$.

  Ta có: $f'(t)=3(t^2-1)\le 0;\forall t\in[-1;1]\Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

  Từ $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.
- Thay $x=y$ vào (2), ta được nghiệm của hệ là: $x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

<u>Thí dụ 199.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y}=8-x^3 & (1) \\ (x-1)^4=y & (2) \end{cases}$

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 400 tháng 10 năm 2010

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge 1 \wedge y \ge 0$.
- Thay (2) vào (1): $\sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 8 - x^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -x^3 + x^2 - 2x + 9 \quad (3)$.
- Nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (3)
- Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x-1}$ trên $[1;+\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty) \quad (4)$

- Xét hàm số $g(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 9$ trên $[1;+\infty)$.

$g'(x) = -3x^2 + 2x - 2 < 0,\ \forall x \ge 1 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $[1;+\infty) \quad (5)$

- Từ $(3),(4),(5) \Rightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3)
- Thay $x = 2$ vào (2) ta được nghiệm duy nhất của hệ là $(x;y) = (2;1)$.

Thí dụ 200. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x^2+1} = y + \dfrac{1}{y^2+1} & (1) \\ \sqrt{9x^2 + \dfrac{4}{y^2}} = \dfrac{3x^2 + 2x - 2}{y} & (2) \end{cases}$

Trích Đề thi thử Đại học lần 1 năm 2013 – THPT Chuyên Đại học Sư Phạm Hà Nội

Bài giải tham khảo

$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad (3)$

- Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{1}{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 1 - \frac{2t}{(t^2+1)^2} = \frac{t^4 + 2t^2 - 2t + 1}{(t^2+1)^2} = \frac{t^4 + t^2 + (t-1)^2}{(t^2+1)^2} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \quad (4)$

- Từ $(3),(4) \Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Thay $x = y$ vào phương trình (2), ta được:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + \frac{4}{x^2}} = \frac{3x^2 + 2x - 2}{x} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + \frac{4}{x^2}} = 3x - \frac{2}{x} + 2 \quad (5)$$

- Đặt $u = 3x - \dfrac{2}{x} \Rightarrow u^2 = 9x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 12 \Leftrightarrow 9x^2 + \dfrac{4}{x^2} = u^2 + 12$.

$$(5) \Leftrightarrow \sqrt{u^2 + 12} = u + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2 \ge 0 \\ u^2 + 12 = u^2 + 4u + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \ge -2 \\ u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow u = 2.$$

$$\Rightarrow u = 3x - \frac{2}{x} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = y = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

- Vậy nghiệm của hệ là $\left(x;y\right) = \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}; \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}\right)$.

Thí dụ 201. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y & \left(1\right) \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} & \left(2\right) \end{cases} \quad \left(*\right)$

Đề thi Đại học khối A và A$_1$ năm 2012

✍ **Nhận xét**:

Ở phương trình $\left(1\right)$, ta thấy bậc của x và y cùng là bậc 3, nên khả năng sử dụng đồng biến và nghịch biến là rất cao. Do hai vế đều có hạng tử bậc hai, nên ta cần tìm những số thỏa: $m\left(px + u\right)^3 + n\left(px + u\right) = m\left(ky + d\right)^3 + n\left(ky + d\right) \quad \left(1'\right)$.

Ta có hệ số trước $x^3,\ y^3$ trong khải triễn của $\left(1'\right)$ là: $\begin{cases} mp^3 \sim 1 \\ nk^3 \sim 1 \end{cases} \Rightarrow$ Có thể chọn

$\Rightarrow m = 1,\ p = 1,\ k = 1$. Lúc đó:

$\left(1'\right) \Leftrightarrow \left(x + u\right)^3 + n\left(x + u\right) = \left(y + d\right)^3 + n\left(y + d\right) \quad \left(2'\right)$.

Ta lại có hệ số trước $x^2,\ y^2$ trong khai triễn của $\left(2'\right)$ là $\begin{cases} 3u = -3 \\ 3d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -1 \\ d = 1 \end{cases}$ nên:

$\left(2'\right) \Leftrightarrow \left(x - 1\right)^3 + n\left(x - 1\right) = \left(y + 1\right)^3 + n\left(y + 1\right) \quad \left(3'\right)$.

Tương tự, hệ số trước x trong khai triễn của $\left(3'\right)$ là

$\begin{cases} 3x + nx = \left(n + 3\right)x \sim -9x \\ 3y + ny = \left(n + 3\right)y \sim -9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -12 \\ n = -12 \end{cases} \Leftrightarrow n = -12$.

Do đó: $\left(3'\right) \Leftrightarrow \left(x - 1\right)^3 - 12\left(x - 1\right) = \left(y + 1\right)^3 - 12\left(y + 1\right) \quad \left(4'\right)$

Kiểm tra:

$x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \Leftrightarrow \left(x - 1\right)^3 - 12\left(x - 1\right) = \left(y + 1\right)^3 - 12\left(y + 1\right)$ luôn đúng và phương trình có dạng $f\left(x - 1\right) = f\left(y + 1\right)$ với hàm đặc trưng $f\left(t\right) = t^3 - 12t$ có $f'\left(t\right) = t^3 - 12t$ là hàm không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Do đó, ta cần tìm miền giới hạn D của hàm này để nó đơn điệu trên D.

Lưu ý, từ $\left(2\right) \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x - \dfrac{1}{2} \le 1 \\ -1 \le y + \dfrac{1}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \le x - 1 \le \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \le y + 1 \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Lúc này, $f'(t) = t^3 - 12t = 3(t^2 - 4) < 0, \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Nên ta có bài giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) & (1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

(1) có dạng $f(x-1) = f(y+1) \quad (3)$

- Từ $(2) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x - \frac{1}{2} \le 1 \\ -1 \le y + \frac{1}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \le y + 1 \le \frac{3}{2} \end{cases}$.

- Xét hàm số $f'(t) = t^3 - 12t$ trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

  $f'(t) = t^3 - 12t = 3(t^2 - 4) < 0,\ \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \quad (4)$

- Từ $(3), (4) \Rightarrow f(x-1) = f(y+1) \Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow x = y + 2 \quad (5)$

- Thay (5) vào (2), ta được: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$.

- Với $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$ và với $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$.

- Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $(x; y) = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

<u>Thí dụ 202.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3(4y^2 + 1) + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6 & (1) \\ x^2 y\left(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}\right) = x + \sqrt{x^2 + 1} & (2) \end{cases}$

Trích Đề thi thử Đại học đợt 1 năm 2013 – THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x \ge 0$.

- Do $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên $x > 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ và từ phương trình $(2) \Rightarrow x^2 y\left(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}\right) > 0 \Rightarrow y > 0$.

- Chia hai vế phương trình (2) của hệ cho $x^2 \ne 0$, ta được

$(2) \Leftrightarrow 2y + 2y\sqrt{4y^2 + 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sqrt{x^2 + 1}$

$\Leftrightarrow (2y) + (2y)\sqrt{(2y)^2 + 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (3)$

- Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

  $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0,\ \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty) \quad (4)$

- Từ $(3),(4) \Rightarrow 2y = \frac{1}{x} \quad (*)$
- Thay $2y = \frac{1}{x}$ vào (1), ta được: $x^3 + x + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6 \quad (5)$
- Nhận thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình (5).
- Xét hàm số $f(x) = x^3 + x + 2(x^2 + 1)\sqrt{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

  $f'(x) = 3x^2 + x + 4x\sqrt{x} + \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến (6).

- Từ $(5),(6) \Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (5).
- Thay $x = 1$ vào $(*) \Rightarrow$ nghiệm của hệ là $(x;y) = \left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Thí dụ 203. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x + 5} + \sqrt{y^2 + 8} = 6 & (2) \end{cases}$

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 400 tháng 10 năm 2010

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x \ge -\frac{5}{4}$.
- Với $y = 0$, thay vào hệ ta được: $\begin{cases} x^5 = 0 \\ \sqrt{4x + 5} + \sqrt{8} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{5} + \sqrt{8} = 6(\text{sai}) \end{cases} (\text{VN})$.
- Với $y \ne 0$, chia 2 vế (1) cho $y^5 \ne 0$, ta được: $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \left(\frac{x}{y}\right) = y^5 + y \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y)$
- Xét hàm số $f(t) = t^5 + t$ trên $\mathbb{R}$.

  $f'(t) = t^4 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

  $\Rightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow y^2 = x$.

- Thay $y^2 = x$ vào phương trình (2), ta được: $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6$

$\Leftrightarrow 5x + 13 + 2\sqrt{(4x+5)(x+8)} = 36 \Leftrightarrow 2\sqrt{(4x+5)(x+8)} = 23 - 5x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 23 - 5x \geq 0 \\ 4(4x+5)(x+8) = (23-5x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

- Vậy nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \{(1;1), (1;-1)\}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 745. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2x = y \\ y^3 + 2y = x \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = (0;0)$.

Bài tập 746. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \\ 2x^2 - xy = 1 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = (\pm 1; \pm 1)$.

Bài tập 747. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ 2y - x^3 = 1 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \left\{(1;1); \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 748. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y(1+x^2) = x(1+y^2) \\ x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = \left\{\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right), \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Bài tập 749. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \tan x - \tan y = y - x \\ \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{y+8}} \end{cases}$.

Olympic 30 – 04 năm 2005

ĐS: $(x;y) = (8;8)$.

Bài tập 750. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 21} = \sqrt{y-1} + y^2 \\ \sqrt{y^2 + 21} = \sqrt{x-1} + x^2 \end{cases}$.

ĐS: $(x;y) = (2;2)$.

Bài tập 751. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x = \sqrt{y+45} - \sqrt{y+5} \\ y = \sqrt{x+45} - \sqrt{x+5} \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right) = \left(4;4\right)$.

Bài tập 752. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3+x^2} + 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{3+y^2} + 2\sqrt{y} - \sqrt{x} = 3 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$.

Bài tập 753. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y+1} = x - y \\ x^2 - 12xy + 9y^2 + 4 = 0 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right) = \left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Bài tập 754. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right) = \left(\dfrac{5\sqrt{5}-7}{2};\dfrac{5\sqrt{5}+5}{2}\right)$.

Bài tập 755. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3\left(x-y\right) - 3\sqrt[3]{3y+2} = 2 \\ y^3 + 3\left(y-x\right) - 3\sqrt[3]{3x+2} = 2 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right) = \left(-1;-1\right),\left(2;2\right)$.

Bài tập 756. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(4x^2+1\right)x + \left(y-3\right)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$.

Đại học khối A năm 2010

ĐS: $\left(x;y\right) = \left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Bài tập 757. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(23-3x\right)\sqrt{7-x} + \left(3y-20\right)\sqrt{6-y} = 0 \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{-3x+2y+8} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right) = \left(5;4\right)$.

Bài tập 758. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 2y + 1 = 0 \\ \left(3-x\right)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$.

Bài tập 759. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \\ y + 1 = 2x^2 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right) = \left(\cos\dfrac{3\pi}{10}; \sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{10}\right)$.

Bài tập 760. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + x - 2 = y^3 + 3y^2 + 4y \\ x^5 + y^3 + 1 = 0 \end{cases}$.

HD: $\left(1\right) \Leftrightarrow f\left(x\right) = f\left(y+1\right) \Rightarrow \left(x;y\right) = \left(0;1\right)$.

Bài tập 761. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ y - \sqrt{x-3} = 2 \end{cases}$.

ĐS: $\left(x;y\right) = \left(\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài tập 762. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y \\ \sqrt{2x+3} + x = y \end{cases}$.

HD: $\left(1\right) \Leftrightarrow x^2\left[\left(x^2\right)^2 + 1\right] = \left(y+3\right)\left[\left(y+3\right)^2 + 1\right] \Rightarrow \left(x;y\right) = \left(3;6\right), \left(-\sqrt{2};-1\right)$.

Bài tập 763. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = \left(2x+1\right)\sqrt{2x-1} \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y \end{cases}$.

Đề thi thử Đại học lần 1 khối A, A_1 năm 2013 – THPT Lý Thái Tổ – Bắc Ninh

HD: $\left(1\right) - 2.\left(2\right) \Rightarrow f\left(y+1\right) = f\left(\sqrt{2x-1}\right) \Rightarrow \left(x;y\right) = \left\{\left(1;0\right), \left(5;2\right)\right\}$.

Bài tập 764. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases}$, $\left(x;y \in \mathbb{R}\right)$.

HSG Tỉnh Vĩnh Phúc Lớp 12 năm 2012 – 2013

HD: $f\left(y\right) = f\left(\sqrt{1-x}\right)$ với hàm đặc trưng $f\left(t\right) = 2t^3 + t \Rightarrow \left(x;y\right) = \left(-3;2\right)$.

Bài tập 765. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4\sqrt{1+2x^2y} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-2x^2y} + \sqrt{1-x^2} \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4+x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1} \end{cases}$, $\left(x;y \in \mathbb{R}\right)$.

Đề thi thử Đại học lần 3 năm 2013 – THPT Lý Thái Tổ – Bắc Ninh

HD: Chia hai vế của $\left(2\right)$ cho x^3.

Bài tập 766. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3y - y^4 = 28 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 18\sqrt{2} \end{cases}$.

HD: Từ $\left(2\right)$ ta rút y theo x và thế vào $\left(1\right) \Rightarrow\ \left(x;y\right)=\left(2\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Bài tập 767. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases}$.

Dự bị khối A năm 2007

ĐS: $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài tập 768. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 \end{cases}$.

HD: $\left(1\right) \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+x=\dfrac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}=\sqrt{1+y^2}-y \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(1;-1\right),\left(\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};\dfrac{\sqrt{11}-3}{2}\right)$.

Bài tập 769. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3\left(4y^2+1\right)+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=6 \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} \end{cases}$.

HD: Chia hai vế $\left(2\right)$ cho $x^2 \Rightarrow f\left(2y\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài tập 770. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{11}+xy^{10}=y^{22}+y^{12} \\ 7y^4+13x+8=2y^4\sqrt[3]{x\left(3x^2+3y^2-1\right)} \end{cases}$.

HSG Tp. Hồ Chí Minh năm 2009 – 2010

HD: Chia $\left(1\right)$ cho $y^{11} \Rightarrow f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f\left(y\right) \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(-\dfrac{8}{13};0\right),\left(\dfrac{16}{\sqrt{89}-5};\pm\sqrt{\dfrac{16}{\sqrt{89}-5}}\right)$.

Bài tập 771. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1}-4x^2y+x\right)\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)=8x^2y^3 \\ x^2y-x+2=0 \end{cases}$.

HD: Nhân liên hợp và biến đổi $\left(1\right)$ về $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f\left(2y\right) \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(4;\dfrac{1}{8}\right)$.

Bài tập 772. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases}$.

HD: $\left(1\right) \Leftrightarrow \left(x-1\right)^3-3\left(x-1\right)=\left(\sqrt{y+3}\right)^3-3\sqrt{y+3} \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(3;1\right)$.

Bài tập 773. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3\left(2x+3y\right)=1 \\ x\left(y^3-1\right)=1 \end{cases}$.

HD: $\left(1\right)+\left(2\right)... \Leftrightarrow y^3+3y=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x} \Rightarrow \left(x;y\right)=\left\{\left(-1;-1\right),\left(\dfrac{1}{2};2\right)\right\}$.

Bài tập 774. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(8x-3\right)\sqrt{2x-1}-y-4y^3=0\\4x^2-8x+2y^3+y^2-2y+3=0\end{cases}$.

Bài tập 775. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3\left(3y+55\right)=64\\xy\left(y^2+3y+3\right)=12+51x\end{cases}$.

Bài tập 776. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3-4x^2+4x-1=2x^3\left(2-y\right)\sqrt{3-2y}\\\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1\end{cases}$.

Bài tập 777. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y+1}+\sqrt[3]{x+y}=5\\\sqrt{x^2+xy+4}+\sqrt{y^2+xy+4}=12\end{cases}$.

Bài tập 778. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-y^3-2=3x-3y^2\\x^2-\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0\end{cases}$.

G – BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ TRONG HỆ PHƯƠNG TRÌNH



Thí dụ 204. Giả sử x, y là các nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$ $(*)$. Xác định a để tích $P = xy$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Cao đẳng sư phạm Vĩnh Phúc khối A, B năm 2002

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ (x+y)^2 - 2xy = a^2 + 2a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = x + y = 2a - 1 \\ P = xy = \dfrac{1}{2}\left(3a^2 - 6a + 4\right) \end{cases}.$$

- Để x, y là nghiệm hệ $\Leftrightarrow S^2 \geq 4P \Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).
- Xét hàm số $P = f(a) = \dfrac{1}{2}\left(3a^2 - 6a + 4\right)$ trên đoạn $\left[2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}; 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

  $P' = f'(a) = 3a - 3$. Cho $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

  Bảng xét dấu

a	$-\infty$	1	$2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$P' = f'(a)$	$-$	0	$+$	$+$		$+$
$P = f(a)$				$\nearrow$		

- Dựa vào bảng biến thiên: $P_{\min} = \dfrac{11}{4} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ khi $a = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

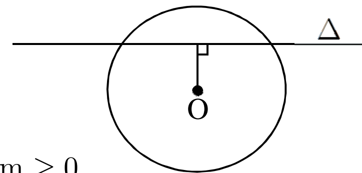
Thí dụ 205. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} mx + (m+1)y = 2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases}$.

Cao đẳng Công Nghiệp IV năm 2004 (Đại học Công Nghiệp IV)

Bài giải tham khảo

- Phương trình (1) có dạng phương trình đường thẳng $\Delta : mx + (m+1)y = 2$ và phương trình (2) có dạng phương trình đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 4$ có tâm là $O(0;0)$ và bán kính $R = 2$.
- Điều kiện hệ phương trình có nghiệm tương đương với đường thẳng cắt đường tròn hoặc tiếp xúc với đường tròn, tức là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng Δ phải nhỏ hơn hoặc bằng 2 (bán kính)

$$d\left(O;\Delta\right)=\frac{\left|m.0+\left(m+1\right).0-2\right|}{\sqrt{m^2+\left(m+1\right)^2}}\le 2$$



$\Leftrightarrow \sqrt{2m^2+2m+1}\le 1 \Leftrightarrow 2m^2+2m\le 0 \Leftrightarrow m\le -1 \vee m\ge 0$.

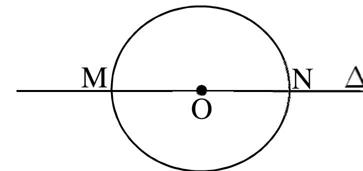
Thí dụ 206. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=9 & (1) \\ \left(2m+1\right)x+my+m-1=0 & (2)\end{cases}$. Xác định m để hệ phương trình trên có hai nghiệm $\left(x_1;y_1\right)$, $\left(x_2;y_2\right)$ sao cho biểu thức $A=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2$ đạt giá trị lớn nhất ?

Cao đẳng Tài Chính Kế Toán IV năm 2004

Bài giải tham khảo

- Phương trình $\left(2\right)$ là phương trình đường thẳng $\Delta:\left(2m+1\right)x+my+m-1=0$ và phương trình $\left(1\right)$ có dạng phương trình đường tròn $\left(C\right): x^2+y^2=9$ có tâm là $O\left(0;0\right)$ và bán kính $R=3$.
- Hệ có hai nghiệm $\left(x_1;y_1\right)$, $\left(x_2;y_2\right) \Leftrightarrow$ đường thẳng Δ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm $M\left(x_1;y_1\right)$, $N\left(x_2;y_2\right)$. Khi đó: $MN=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$

  $\Leftrightarrow A=MN^2=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2$.



- Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất khi Δ đi qua tâm O của đường tròn, tức là: $\Delta:\left(2m+1\right).0+m.0+m-1=0 \Leftrightarrow m=1$.

Thí dụ 207. Cho a là một số thực dương. Chứng minh rằng hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 4ax & (1) \\ y-x^2\ge 2a & (2)\end{cases}$$

Đại học Huế khối A năm 1999 – Hệ không chuyên ban

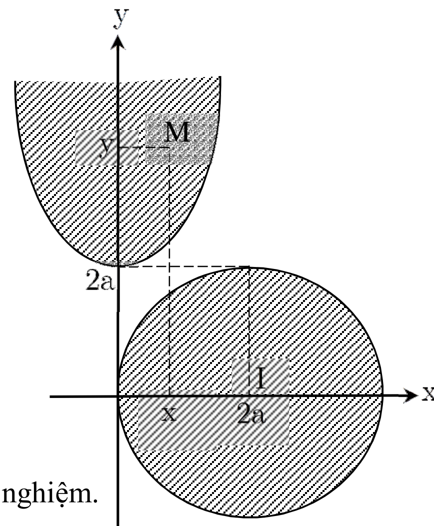
Bài giải tham khảo

$\left(1\right)\Leftrightarrow \left(x-2a\right)^2+y^2\le 4a^2$.

- Nếu $\left(x;y\right)$ thỏa $\left(1\right)\Leftrightarrow M\left(x;y\right)$ ở miền trong của đường tròn tâm $I\left(2a;0\right)$, bán kính $R=2a$.

$\left(2\right)\Leftrightarrow y\ge x^2+2a$.

- Nếu $\left(x;y\right)$ thỏa $\left(2\right)\Leftrightarrow M\left(x;y\right)$ ở miền trên của parabol có phương trình: $y=x^2+2a$.
- Do hai miền không giao nhau (hình vẽ) nên hệ vô nghiệm.



Thí dụ 208. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$ $(*)$. Tìm tất cả các giá trị của a để hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Đại học Thương Mại năm 2000

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay - a = 0 & (1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

- Ta xem (1) là phương trình đường thẳng Δ và (2) là phương trình đường tròn (C_1) có tâm là $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ và bán kính $R = \frac{1}{2}$.
- Để hệ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow d(I,\Delta) < R$

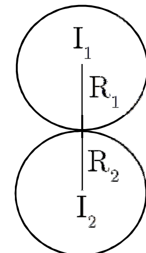
$$\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2} - a\right|}{\sqrt{1 + a^2}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |1 - 2a| < \sqrt{1 + a^2} \Leftrightarrow 1 - 4a + 4a^2 < 1 + a^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{4}{3}.$$

Thí dụ 209. Xác định tham số k để hệ sau có 1 nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 \le k & (1) \\ (x + 1)^2 + y^2 \le k & (2) \end{cases}$

Đại học Giao thông vận tải cơ sở II – Tp. Hồ Chí Minh năm 1999

Bài giải tham khảo



- Xem (1) là phương trình hình tròn (C_1) với tâm $I_1(0;-1)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{k}$ và (2) là phương trình hình tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;0)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{k} > 0$.
- Để hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (C_1)$ tiếp xúc ngoài với (C_2) (không tiếp xúc trong vì $R_1 = R_2$) $\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = 2\sqrt{k} \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$.

Thí dụ 210. Tìm a để hệ: $\begin{cases} x + y \le 2 \\ x + y + \sqrt{2x(y - 1) + a} = 2 \end{cases}$ $(*)$ có nghiệm ?

Đại học Giao Thông Vận Tải năm 2001

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \le 2 \\ \sqrt{2x(y-1)+a} = 2-(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \le 2 \\ 2x(y-1)+a = [2-(x+y)]^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \le -x+2 & (1) \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = a+1 & (2) \end{cases}$$

- Ta có: (1) là miền nằm dưới đường thẳng $\Delta : y = -x+2$ và (2) là đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $\sqrt{a+1}$, $(a \ge -1)$. Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng $\Delta : y = -x+2$ là $d(I,\Delta) = \dfrac{|1+2-2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Để hệ $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow d(I,\Delta) \le R \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \sqrt{a+1} \Leftrightarrow a \ge -\dfrac{1}{2}$.

<u>Thí dụ 211.</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y - xy = 1 \end{cases} \quad (*)$

1/ Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

2/ Với giá trị nào của m thì hệ trên có nghiệm.

Đại học Dân lập Văn Lang khối A – Hệ không phân ban năm 1999

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = m \\ (x+y) - xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = m \\ S - P = 1 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} S = x+y \\ P = xy \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = S-1 \\ S^2 - 2S + 2 - m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

1/ Khi $m = 2$: $\begin{cases} S^2 - 2S = 0 \\ P = S-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

2/ Hệ có nghiệm khi (1) có nghiệm và nghiệm hệ S, P thỏa $S^2 - 4P \ge 0$

Ta có: $\Delta' = 1 - 2 + m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 1$. Khi đó, hệ S, P có nghiệm là

$$\begin{cases} S = 1 - \sqrt{m-1} \\ P = -\sqrt{m-1} \end{cases} \vee \begin{cases} S = 1 + \sqrt{m-1} \\ P = \sqrt{m-1} \end{cases}.$$

Điều kiện hệ có nghiệm: $S^2 - 4P \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(1 - \sqrt{m-1}\right)^2 + 4\sqrt{m-1} \ge 0 \\ \left(1 + \sqrt{m-1}\right)^2 - 4\sqrt{m-1} \ge 0 \end{array}\right.$

(luôn thỏa với mọi giá trị $m \ge 1$)

- Vậy khi $m \ge 1$ thì hệ phương trình có nghiệm.

Thí dụ 212. Với những giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình: $\begin{cases} 5(x+y) - 4xy = 4 \\ x + y - xy = 1 - m \end{cases} \ (*)$ có nghiệm ?

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối D năm 1999

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x+y) - 4xy = 4 \\ 4(x+y) - 4xy = 4 - 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4m = S \\ xy = 5m - 1 = P \end{cases}.$$

$(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow S^2 \ge 4P \Leftrightarrow 16m^2 \ge 20m - 4 \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{4} \vee m \ge 1$.

Thí dụ 213. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 - y^3 = m(x - y) \end{cases} \ (1)$ (với m là tham số)

1/ Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

2/ Với những giá trị nào của m thì hệ phương trình có ba nghiệm phân biệt ?

Cao đẳng sư phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1999

Bài giải tham khảo

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2) - m(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 - m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x + 1 - m = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

1/ Khi $m = 1$ thì $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

2/ Hệ (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt $\ne \dfrac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4(1 - m) > 0 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 - m \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{3}{4}.$$

Thí dụ 214. Cho hệ phương : $\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2y + y^2x = m + 1 \end{cases} \ (*)$

1/ Giải hệ phương trình khi $m = -3$.

2/ Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất.

Đại học Cảnh Sát Nhân Dân khối A năm 2000

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+xy=m+2 \\ xy(x+y)=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+P=m+2 \\ SP=m+1 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=m+2-S \\ S(m+2-S)=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=m+2-S \\ S^2-(m+2)S+(m+1)=0 \quad (*) \end{cases}$$

1/ Khi $m=-3 \Rightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} S=-2 \\ P=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$.

2/ Để hệ có nghiệm thì phương trình $(*)$ có nghiệm S và thỏa $S^2-4P\geq 0$.

$\Delta_{(*)}=(m+2)^2-4(m+1)=m^2\geq 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Khi đó hai nghiệm của $(*)$ là $\begin{cases} S=m+1 \\ P=1 \end{cases} \vee \begin{cases} S=1 \\ P=m+1 \end{cases}$.

Mặtc khác: $S^2-4P\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+1)^2-4\geq 0 \\ 1-4(m+1)\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -3 \\ m\geq 3 \\ m\leq -\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -\dfrac{3}{4} \\ m\geq 3 \end{array}\right.$.

- Vậy để hệ phương trình có nghiệm thì $m\leq -\dfrac{3}{4} \vee m\geq 3$.

Thí dụ 215. Chứng tỏ rằng với mọi giá trị của tham số m, hệ $\begin{cases} x+xy+y=2m+1 \\ xy(x+y)=m^2+m \end{cases}$ $(*)$ luôn có nghiệm. Xác định m để hệ phương trình đó có một nghiệm duy nhất ?

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối A năm 1999

Bài giải tham khảo

- Đặt $S=x+y;\ P=xy$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} S+P=2m+1 \\ SP=m^2+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=2m+1-S \\ S(2m+1)-S=m^2+m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=2m+1-S \\ S^2-(2m+1)S+m^2+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=m \\ P=m+1 \end{cases} \vee \begin{cases} S=m+1 \\ P=m \end{cases}.$$

- Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S^2\geq 4P \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2\geq 4(m+1) \\ (m+1)^2\geq 4m^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-4m-4\geq 0 \\ (m-1)^2\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall m\in\mathbb{R}$ thì hệ phương trình luôn có nghiệm.

- Hệ $(*)$ là hệ đối xứng. Do đó, nếu $(x;y)$ là một nghiệm của $(*)$ thì $(y;x)$ cũng là nghiệm của $(*) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow S^2 - 4P = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 2 \pm 2\sqrt{2}$.
- Với $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow m = 1$.
- Với $m = 2 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2 + 2\sqrt{2} \\ xy = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3 - 2\sqrt{2} \\ xy = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 + \sqrt{2} \\ x \ne y \end{array}\right. \Rightarrow$ hệ không có nghiệm duy nhất $\Rightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ không thỏa yêu cầu bài toán.
- Vậy với $m = 1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

<u>**Thí dụ 216.**</u> Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \le 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \le 0 \end{cases} \quad (*)$ có nghiệm ? Xác định m để hệ bất phương trình có một nghiệm duy nhất ?

Đại học Ngoại Thương khối D năm 1999

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 7 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1;7] \\ (x^2 - 2mx + m^2) - (x - m) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1;7] \\ (x-m)^2 - (x-m) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1;7] \\ (x-m)(x-m-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1;7] \\ x \in [m;m+1] \end{cases}.$$

- Hệ $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow [1;7] \cap [m;m+1] \ne \varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m \le 7 \\ m \le 1 < 7 \le m + 1 \\ m \le 1 \le m + 1 \le 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in [0;7]$.
- Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 7 \\ m + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 7 \\ m = 0 \end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l} m = 7 \Rightarrow x = 7 \\ m = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array}\right.$.

<u>**Thí dụ 217.**</u> Tìm tham số m để hệ $\begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 \ge 3 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 \le \dfrac{m}{m-1} \end{cases} \quad (*)$ có nghiệm ?

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối A

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện cần: Giả sử hệ $(*)$ có nghiệm $(x;y)$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x^2 - 2xy + y^2 \le -3 \\ 6x^2 + 6xy + 3y^2 \le \dfrac{3m}{m-1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 \le \frac{3m}{m-1} - 3 \Leftrightarrow \left(x+2y\right)^2 \le \frac{3}{m-1} \Leftrightarrow m > 1.$$

- Điều kiện đủ: Với $m > 1$ thì $\dfrac{m}{m-1} > 1$ nên nếu hệ phương trình sau có nghiệm thì phương trình $\left(*\right)$ sẽ có nghiệm:

$$\begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x^2 - 2xy + y^2 = -3 \\ 6x^2 + 6xy + 3y^2 = 3 \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(x+2y\right)^2 = 0 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 5y^2 = 1 \end{cases}$. Rõ ràng hệ này có nghiệm.

- Vậy hệ có nghiệm khi $m > 1$.

Thí dụ 218. Xác định tham số a để hệ sau đây có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} \left(x+1\right)^2 = y + a & \left(1\right) \\ \left(y+1\right)^2 = x + a & \left(2\right) \end{cases} \quad \left(*\right)$

Đại học Sư Phạm và Đại học Luật Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2001

Bài giải tham khảo

- Do vai trò của x và y là như nhau trong hệ hai phương trình. Vì vậy, nếu $\left(x;y\right)$ là nghiệm hệ thì $\left(y;x\right)$ cũng là nghiệm hệ.

- Nói cách khác: $x = y$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất. Thay $x = y$ vào $\left(1\right)$ ta được: $\left(1\right) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - a = 0 \quad \left(3\right)$

$\left(3\right)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{4}$.

- Điều kiện đủ: với $a = \dfrac{3}{4}$ thì $\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+1\right)^2 = y + \dfrac{3}{4} \\ \left(y+1\right)^2 = x + \dfrac{3}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+1\right)^2 = y + \dfrac{3}{4} \\ \left(x+1\right)^2 - \left(y+1\right)^2 = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+1\right)^2 = y + \dfrac{3}{4} \\ \left(x-y\right)\left(x+y+3\right) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left(x+1\right)^2 = x + \dfrac{3}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ \left(x+1\right)^2 = -x - \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất.

- Vậy $a = \dfrac{3}{4}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Thí dụ 219. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k\left(\sqrt{x+y} - 1\right) = 1 \\ x + y = xy + 1 \end{cases} \quad \left(*\right)$

1/ Giải hệ phương trình khi $k = 0$.

2/ Tìm tất cả các giá trị của k để hệ có nghiệm duy nhất.

Đại học Hồng Đức khối A năm 2001

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k\left(\sqrt{x + y} - 1\right) = 1 \\ x - 1 + y\left(1 - x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k\left(\sqrt{x + y} - 1\right) = 1 \\ \left(x - 1\right)\left(y - 1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k\left(\sqrt{x + y} - 1\right) = 1 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k\left(\sqrt{x + y} - 1\right) = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{y^2} - k\left(\sqrt{y + 1} - 1\right) = 1 \end{cases} & \left(1\right) \\ \begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{x^2} - k\left(\sqrt{x + 1} - 1\right) = 1 \end{cases} & \left(2\right) \end{array} \right.$$

a/ Khi $k = 0$ thì $\left(I\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{y^2} = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{x^2} = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ \left|y\right| = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ \left|x\right| = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.

b/ Để hệ có nghiệm duy nhất thì $\left(1\right)$ có nghiệm duy nhất, còn $\left(2\right)$ vô nghiệm hoặc ngược lại. Nhưng bản chất của hệ $\left(1\right)$ và hệ $\left(2\right)$ là giống nhau. Tức là $\left(1\right)$ có nghiệm duy nhất thì $\left(2\right)$ cũng có nghiệm duy nhất, hệ $\left(1\right)$ vô nghiệm thì hệ $\left(2\right)$ cũng vô nghiệm,… Do đó, không tồn tại giá trị k thỏa yêu cầu bài toán.

<u>Cách khác</u>:

- Để ý vài trò của x và y như nhau trong cả hai phương trình ở hệ $\left(*\right)$. Vì vậy, nếu $\left(x;y\right)$ là nghiệm $\left(*\right)$ thì $\left(y;x\right)$ cũng là nghiệm.
- Hay nói cách khác, điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $x = y$.
- Thay $x = y$ vào $\left(*\right)$ ta được: $\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 1} - k\left(\sqrt{2x} - 1\right) = 1 \\ 2x = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 0 \end{cases}$.
- Điều kiện đủ: thay $k = 0$ vào hệ, ở câu a/ ta giải được 3 nghiệm. Do đó, không tồn tại k để hệ có nghiệm duy nhất.

<u>Thí dụ 220.</u> Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases} \qquad \left(*\right)$$

Đại học An Ninh khối A năm 2000

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Đặt $m = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105}$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = m \end{cases}$.

- Do $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên đặt $y = tx$, $(x \neq 0)$ thì hệ tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(1 - 2t - 3t^2\right) = 8 & (1) \\ x^2\left(2 + 4t + 5t^2\right) = m & (2) \end{cases} \overset{(1):(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1 - 2t - 3t^2}{2 + 4t + 5t^2} = \frac{8}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{8} = \frac{\left(2 + 4t + 5t^2\right)}{1 - 2t - 3t^2} = f(t) \quad (3),\ \forall t \neq -1;\ t \neq \frac{1}{3}.$$

- Từ $(2) \Rightarrow 1 - 2t - 3t^2 > 0 \Leftrightarrow t \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

- Xét hàm số $f(t) = \dfrac{5t^2 + 4t + 2}{-3t^2 - 2t + 1}$ trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

$f'(t) = \dfrac{2t^2 + 22t + 8}{\left(-3t^2 - 2t + 1\right)^2}$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{-11 - \sqrt{105}}{2} \vee t_2 = \dfrac{-11 + \sqrt{105}}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	t_1	-1		t_2		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	−	−	0	+		+
$f(t)$				$+\infty$ ↘	$\frac{\sqrt{105} - 3}{8}$	↗ $+\infty$		

- Dựa vào bảng biến thiên, để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{m}{8} \geq \min_{\left(-1;\frac{1}{3}\right)} f(t) = \frac{\sqrt{105} - 3}{8} \Leftrightarrow m \geq \sqrt{105} - 3$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \geq \sqrt{105} - 3 \Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)(a - 3)\left(a^2 - 2a + 3\right) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -1 \vee a \geq 3.$$

- Vậy để hệ phương trình có nghiệm thì $a \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

<u>Thí dụ 221.</u> Tìm tham số m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + (y + 2)x^2 + 2xy = -2m - 3 \\ x^2 + 3x + y = m \end{cases}$ $(*)$ có nghiệm ?

HSG Tỉnh Long An (bảng A) – ngày 06/10/2011

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^3 + 2x^2\right) + x^2y + 2xy = -2m - 3 \\ x^2 + 3x + y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2 + 2x\right) + y\left(x^2 + 2x\right) = -2m - 3 \\ \left(x^2 + 2x\right) + \left(x + y\right) = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 + 2x\right)\left(x + y\right) = -2m - 3 \\ \left(x^2 + 2x\right) + \left(x + y\right) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = -2m - 3 \\ u + v = m \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u = x^2 + 2x \ge -1 \\ v = x + y \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = m - u \\ u\left(m - u\right) = -2m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = m - u \\ u^2 - 3 = m\left(u + 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = m - u \\ m = \dfrac{u^2 - 3}{u + 2} \end{cases}\cdot$$

- Xét hàm số $f\left(u\right) = \dfrac{u^2 - 3}{u + 2}$ trên $\left[-1; +\infty\right)$:

  $f'\left(u\right) = \dfrac{u^2 + 4u + 3}{\left(u + 2\right)^2} \ge 0,\ \forall u \ge -1 \Rightarrow$ Hàm số $f\left(u\right)$ đồng biến trên $\left[-1; +\infty\right)$.

  Bảng biến thiên

u	$-\infty$	-1		$+\infty$
$f'\left(u\right)$	(bỏ)		$+$	
$f\left(u\right)$	(bỏ)	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên, hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge -2$.

<u>Thí dụ 222.</u> Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ sau có nghiệm $\left(x; y\right)$ thỏa mãn điều kiện $x \ge 4$:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x + 5} + \sqrt{y + 3} \le a \end{cases} \quad (*)$$

Đại học Sư phạm Hà Nội khối A năm 2001

Bài giải tham khảo

- Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \sqrt{y} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x \\ v^2 = y \end{cases}$. Do $x \ge 4 \Rightarrow u \ge 2$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ \sqrt{u^2 + 5} + \sqrt{v^2 + 3} \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - v \\ \sqrt{\left(3 - v\right)^2 + 5} + \sqrt{v^2 + 3} \le a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - v \ge 2 \\ \sqrt{14 - 6v + v^2} + \sqrt{v^2 + 3} \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le v \le 1 \\ \sqrt{v^2 - 6v + 14} + \sqrt{v^2 + 3} \le a \end{cases} \quad (1).$$

- Xét hàm số $f(v) = \sqrt{v^2 - 6v + 14} + \sqrt{v^2 + 3}$ trên đoạn $[0;1]$.

$$f'(v) = \frac{v - 3}{\sqrt{v^2 - 6v + 14}} + \frac{v}{\sqrt{v^2 + 3}} = \frac{(v - 3)\sqrt{v^2 + 3} + v\sqrt{v^2 - 6v + 14}}{\sqrt{(v^2 - 6v + 14)(v^2 + 3)}}.$$

Cho $f'(v) = 0 \Leftrightarrow (v - 3)\sqrt{v^2 + 3} + v\sqrt{v^2 - 6v + 14} = 0$

$$\Leftrightarrow (3 - v)\sqrt{v^2 + 3} = v\sqrt{v^2 - 6v + 14} \Leftrightarrow (3 - v)^2 (v^2 + 3) = v^2 (v^2 - 6v + 14)$$

$$\Leftrightarrow 5v^2 = 3(v - 3)^2 \Leftrightarrow 2v^2 + 18v - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v_1 = \dfrac{-9 + \sqrt{135}}{2} \notin [0;1] \\ v_2 = \dfrac{-9 - \sqrt{135}}{2} \notin [0;1] \end{array} \right. .$$

Bảng biến thiên

v	$-\infty$	v_2	0		1	v_1	$+\infty$
$f'(v)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(v)$			$\sqrt{14} + \sqrt{3}$	$\searrow$	5		

- Để $(*)$ có nghiệm thỏa $x \ge 4$ thì hệ (1) phải có nghiệm. Dựa vào bảng biến thiên, để hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow a \ge \min\limits_{[0;1]} f(v) \Leftrightarrow a \ge 5$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài tập 779. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}=m\\x+y=2m-5\end{cases}$ có nghiệm ?

ĐS: $m=0 \vee m\in[2;4]$.

Bài tập 780. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases}2x-y-m=0\\x+\sqrt{xy}=1\end{cases}$ có nghiệm duy nhất ?

Đề thi thử Đại học lần 1 khối B năm 2010 – THPT Phan Châu Trinh – Đà Nẵng

ĐS: $m\in(2;+\infty)$.

Bài tập 781. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\\\sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}\le m\end{cases}$ thỏa mãn $\forall x\ge 4$?

ĐS: $m\in[5;+\infty)$.

Bài tập 782. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-5x+4\le 0\\3x^2-mx\sqrt{x}+16=0\end{cases}$ có nghiệm ?

ĐS: $m\in[8;19]$.

Bài tập 783. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases}x^2+2xy-7y^2\ge\dfrac{1-m}{1+m}\\3x^2+10xy-5y^2\le -2\end{cases}$ có nghiệm ?

HSG lớp 12 – Tỉnh Thái Bình năm 2005 – 2006

ĐS: $m\in(-\infty;-1)$.

Bài tập 784. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases}3x^2-4xy+y^2<m^2\\x^2+xy-4y^2\ge m+4\end{cases}$ có nghiệm ?

ĐS: $m\in(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$.

Bài tập 785. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases}3y-m\sqrt{x^2+1}=1\\x+y+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=m^2\end{cases}$ có nghiệm duy nhất ?

ĐS: $m=-1 \vee m=\dfrac{4}{3}$.

Bài tập 786. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases}x^2+(y+1)^2\le m\\(x+1)^2+y^2\le m\end{cases}$ có nghiệm duy nhất ?

ĐS: $m = \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 787. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 4y^2 \le 6 \\ x^2 + xy - 2y^2 = m \end{cases}$ có nghiệm ?

ĐS: $m \in \left[-\dfrac{54}{13};2\right]$.

Bài tập 788. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} xy\left(x+2\right)\left(y+2\right) = 5m - 6 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2m \end{cases}$ có nghiệm ?

HD: $\begin{cases} u = x^2 + x \ge -1 \\ v = y^2 + y \ge -1 \end{cases} \Rightarrow m \in \left[\dfrac{5}{7};2\right] \cup \left[3;+\infty\right)$.

Bài tập 789. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y-1} = 4 \\ x + y = 3m \end{cases}$ có nghiệm ?

HD: $\begin{cases} u = \sqrt{x-4} \ge 0 \\ v = \sqrt{y-1} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \left[\dfrac{13}{7};7\right]$.

Bài tập 790. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{y+2} = m \\ x + y = 3m \end{cases}$ có nghiệm ?

ĐS: $m \in \left[\dfrac{3-\sqrt{21}}{2};\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right]$.

Bài tập 791. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = m \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} = m \end{cases}$ có nghiệm ?

HD: Từ hệ, chứng minh được $x = y$, đưa về xét $m = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \Rightarrow m \ge \sqrt{3}$.

Bài tập 792. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \ge 3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \le \dfrac{2m-1}{2m+5} \end{cases}$ có nghiệm ?

ĐS: $m \in \left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài tập 793. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} m\left(x^6 + x^4 + x^2 + 1\right) = x^3y \\ m\left(x^8 + x^6 + x^2 +\right) + \left(m-1\right)x^4 = 2x^4y \end{cases}$ có nghiệm ?

ĐS: $m \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(0;+\infty\right)$.

Bài tập 794. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{xy - y} + x + y = 5 \\ \sqrt{5 - x} + \sqrt{1 - y} = m \end{cases}$ có nghiệm ?

ĐS: $m \in \left[1; \sqrt{5}\right]$.

Bài tập 795. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y - x^2 + y = 2 \\ m\left(x^2 + y\right) - x^2y = 4 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt ?

HD: Từ $\text{PT}\left(1\right) \Rightarrow y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \Rightarrow m = 2$.

Bài tập 796. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2mxy + \left(m + 1\right)y^2 = m \\ x^2 + \left(m + 1\right)xy + 2y^2 = 2m - 1 \end{cases}$ có bốn nghiệm phân biệt ?

ĐS: $m \in \left(\dfrac{4 + 2\sqrt{13}}{9}; 2\right)$.

Bài tập 797. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} 1 - \sqrt{\left|x - 1\right|} = \sqrt{\left|y\right|} \\ x^2 + y^2 + 4m + 1 = 2x \end{cases}$ có bốn nghiệm phân biệt ?

ĐS: $m = -\dfrac{1}{4} \vee m = -\dfrac{1}{32}$.

Bài tập 798. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + \left(m + 1\right)xy + \left(m + 2\right)y^2 = m - 1 \\ x^2 + \left(m - 1\right)xy + \left(2m + 5\right)y^2 = m + 1 \end{cases}$ có bốn nghiệm thực phân biệt ?

ĐS: $m \in \left(\dfrac{\sqrt{21}}{3}; +\infty\right)$.

Bài tập 799. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2y + xy^2 = 3m - 8 \end{cases} \quad \left(*\right)$

1/ Giải hệ phương trình khi $m = \dfrac{7}{2}$.

2/ Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm.

ĐS: 1/ $S = \left\{\left(2, \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{2}, 2\right)\right\}$ 2/ $m \le \dfrac{13 + 3\sqrt{33}}{8} \vee m \ge 8$.

Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh năm 1994 – 1995

Bài tập 800. Cho hệ phương : $\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2y + y^2x = m + 1 \end{cases}$.

1/ Giải hệ phương trình khi $m = -3$.

2/ Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất.

Đại học Cảnh Sát Nhân Dân khối A năm 2000

<u>ĐS</u>: 1/ $x = y = -1$. 2/ $m \le -\frac{3}{4} \vee m \ge 3$.

<u>Bài tập 801.</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y - xy = 1 \end{cases} \quad (*)$

1/ Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

2/ Với giá trị nào của m thì hệ trên có nghiệm.

Đại học Dân lập Văn Lang khối A – Hệ không phân ban năm 1999

<u>ĐS</u>: 1/ $(x;y) = \{(1;-1),(-1;1),(1;1)\}$. 2/ $m \ge 1$.

<u>Bài tập 802.</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = m + 1 \\ x^2y + y^2x = 2m^2 - m - 3 \end{cases}$.

1/ Giải hệ với $m = 3$.

2/ Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, hệ phương trình trên có nghiệm.

Đại học sư phạm Quy Nhơn năm 1999

<u>ĐS</u>: 1/ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$. 2/ $(m-3)^2 + 4 > 0, \forall \in \mathbb{R}$.

<u>Bài tập 803.</u> Tìm tham số m để hệ $\begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 \ge 3 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 \le \dfrac{m}{m-1} \end{cases} \quad (*)$ có nghiệm ?

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối A

<u>ĐS</u>: $m > 1$.

<u>Bài tập 804.</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = 6 - a^2 \end{cases}$ (a là tham số)

1/ Giải hệ phương trình với $a = 2$.

2/ Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = xy + 2(x + y)$ trong đó $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Đại học Thái Nguyên khối D năm 2001

<u>Bài tập 805.</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = \sqrt{m} \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{m} \end{cases}, \ (m \ge 0)$.

1/ Giải hệ phương trình khi $m = 9$.

2/ Xác định m để hệ có nghiệm.

Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối D – M – T năm 2001

Bài tập 806. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=m \\ x^4+y^4=3m-2 \end{cases}$ có nghiệm ?

Cao đẳng Sư Phạm Quãng Nam năm 2001

Bài tập 807. Giả sử $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=2a-1 \\ x^2+y^2=a^2+2a-3 \end{cases}$. Xác định a để tích số xy nhỏ nhất ?

Đại học Kinh Tế năm 1995

Bài tập 808. Xác định a để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} y^2=x^3-4x^2+ax \\ x^2=y^3-4y^2+ay \end{cases}$.

Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

ĐS: $a>\dfrac{25}{4}$.

Bài tập 809. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=a \\ x+y-\sqrt{xy}=a \end{cases}$ (với a là tham số)

1/ Giải hệ phương trình khi $a=4$.

2/ Tìm a để hệ có nghiệm ?

Cao đẳng Sư Phạm năm 1998

Bài tập 810. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11 \\ x^2+2xy+3y^2=17+m \end{cases}$.

1/ Giải hệ phương trình với $m=0$.

2/ Tìm a để hệ phương trình có nghiệm ?

Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1998

Bài tập 811. Tìm tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m \end{cases}$ có nghiệm.

Đại học khối D năm 2004

ĐS: $0\le m\le\dfrac{1}{4}$.

Bài tập 812. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-(y+2)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases}$ $(*)$ $(x,y\in\mathbb{R})$ có nghiệm ?

Đại học khối D năm 2011

Bài tập 813. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \dfrac{1}{x^3} + y^3 + \dfrac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$ có nghiệm thực ?

Đại học khối D năm 2007

HD: $\dfrac{7}{4} \le m \le 2 \vee m \ge 22$. Đặt $v = y + \dfrac{1}{y}, u = x + \dfrac{1}{x}$, $\left(|u| \ge 2, |v| \ge 2\right)$. Dùng PP hàm số.

Bài tập 814. Tìm tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$ có nghiệm ?

Đại học khối D năm 2004

ĐS: $0 \le m \le \dfrac{1}{4}$.

Bài tập 815. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 + m \end{cases}$. Tìm a để hệ phương trình có nghiệm ?

Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1998

Bài tập 816. Tìm các giá trị của a để hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2\left(1 + a\right) \\ \left(x + y\right)^2 = 4 \end{cases}$ có đúng 2 nghiệm ?

Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1998

Bài tập 817. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \\ x + y - \sqrt{xy} = a \end{cases}$ (với a là tham số). Tìm a để hệ có nghiệm ?

Cao đẳng Sư Phạm năm 1998

Bài tập 818. Xác định a để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay \end{cases}$?

Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

Bài tập 819. Giả sử $\left(x; y\right)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$. Xác định a để tích số xy nhỏ nhất ?

Đại học Kinh Tế năm 1995

Bài tập 820. Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hệ: $\begin{cases} x^2 + 4xy^2 + 12y^4 \ge 72 \\ 3x^2 + 20xy^2 + 80y^4 = a \end{cases}$ có nghiệm ?

HSG lớp 12 – Tỉnh Thái Bình – năm học 2006 – 2007

Bài tập 821. Tìm các giá trị của a để hệ : $\begin{cases} \left|x^2-5x+1\right|-9x^2-5x+4+10x\left|x\right|=0 \\ x^2-2\left(a-1\right)x+a\left(a-2\right)=0 \end{cases}$ có nghiệm ?

Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 1993

Bài tập 822. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=m \\ x^4+y^4=3m-2 \end{cases}$ có nghiệm ?

Cao đẳng Sư Phạm Quãng Nam năm 2001

Bài tập 823. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{m} \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{m} \end{cases}$, $\left(m\geq 0\right)$. Xác định m để hệ có nghiệm ?

Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối D – M – T năm 2001

Bài tập 824. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=6-a^2 \end{cases}$ (a là tham số). Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=xy+2\left(x+y\right)$ trong đó $\left(x;y\right)$ là nghiệm của hệ phương trình ?

Đại học Thái Nguyên khối D năm 2001

Bài tập 825. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3=m\left(x-y\right) \\ x+y=-1 \end{cases}$. Tìm m để hệ có ba nghiệm phân biệt $\left(x_1;y_1\right)$, $\left(x_2;y_2\right)$, $\left(x_3;y_3\right)$ với x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng và trong ba số đó có hai số có trị tuyệt đối lớn hơn 1 ?

Cao đẳng Sư Phạm Kỹ Thuật Vinh năm 2001 – Đại học Y Dược Sài Gòn năm 1994

Bài tập 826. Tìm tất cả các giá trị của a để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+\left|y\right|=a \\ \sqrt{y^2+5}+\left|x\right|=\sqrt{x^2+5}+\sqrt{3}-a \end{cases}$ có đúng một nghiệm ?

Đại học Cần Thơ khối A năm 2001

Bài tập 827. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3 \\ x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{x+1}=m \end{cases}$.

1/ Giải hệ phương trình với $m=6$.

2/ Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình có nghiệm.

Đại học Thủy Sản – đợt II năm 2000

Bài tập 828. Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-8x+7\leq 0 \\ x^2-\left(2m+1\right)x+m^2+m\leq 0 \end{cases}$ có nghiệm ? Xác định m để hệ bất phương trình có một nghiệm duy nhất ?

Đại học Ngoại Thương Cơ Sở 2 năm 1999

Bài tập 829. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2-\left(m+2\right)x+2m<0 \\ x^2+\left(m+7\right)x+7m<0 \end{cases}$ có nghiệm ?

Học Viện Quan Hệ Quốc Tế năm 1997

ĐS: $m < 0$.

Bài tập 830. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \le 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \le 0 \end{cases}$ có nghiệm ?

Đại học Thương Mại năm 1997

Bài tập 831. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2mx < 0 \\ |x - 1 + m| \le 2m \end{cases}$ có nghiệm ?

Đại học Thủy Lợi năm 1998

Bài tập 832. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 3x + 4 \le 0 \\ x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m \ge 0 \end{cases}$ có nghiệm ?

Đại học Thương Mại năm 1998

Bài tập 833. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$?

Dự bị 2 Đại học khối D năm 2007

ĐS: $m > 2$. PT $\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x^2 + (2-m)x - 1 = 0 \end{cases}$. Dùng tam thức bậc hai.

Bài tập 834. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$ $(*)$.

1/ Giải hệ phương trình khi $m = 5$.

2/ Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình $(*)$ có nghiệm.

Đại học Tổng Hợp năm 1991 – 1992

ĐS: 1/ $S = \{(2,1),(1,2)\}$ 2/ $m \in [0;8]$.

Bài tập 835. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = m \end{cases}$ $(*)$

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ với $m = 12$.

2/ Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình $(*)$ đã cho có nghiệm.

Đại học Ngoại Thương Hà Nội năm 1997 – 1998

ĐS: 1/ $S = \{(1,2),(2,1),(1,-3),(-3,1),(\mp 2,\pm 2),(-2,-3),(-3,-2)\}$ 2/ $m \in \left[-\frac{33}{16}, 16\right]$.

Bài tập 836. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = m \\ (x+1)y^2 + xy = m(y+2) \end{cases}$ $(*)$

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ khi $m = 4$.

2/ Tìm tất cả giá trị của tham số m để hệ phương trình $(*)$ có nhiều hơn 2 nghiệm.

Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1997 – 1998

<u>ĐS</u>: 1/ $S = \left\{(2,2),\left(3 \mp \sqrt{5}, 1 \pm \sqrt{5}\right)\right\}$ 2/ $|m| > \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

<u>Bài tập 837.</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 + m \end{cases} \quad (*)$

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ với $m = 0$.

2/ Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình $(*)$ có nghiệm.

Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh đợt 2 năm 1998 – 1999

<u>ĐS</u>: 1/ $S = \left\{(\pm 1, \pm 2),\left(\pm \dfrac{4}{\sqrt{3}}, \mp \dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ 2/ $5 - 11\sqrt{3} \le m \le 5 + 11\sqrt{3}$.

<u>Bài tập 838.</u> Tìm tham số m để hệ $\begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ y^3 = x^2 + 7y^2 - my \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ?

Đại học Sư Phạm Vinh năm 1999 – 2000

<u>ĐS</u>: $m > 16$.

<u>Bài tập 839.</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = m + 6 \\ 2x + xy + 2y = m \end{cases} \quad (*)$ với m là tham số ?

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ khi $m = -3$.

2/ Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất.

Trường Sĩ Quan Lục Quân 2 – Cấp phân đội năm 1999 – 2000

<u>ĐS</u>: a/ $S = \left\{\left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right),(-1,-1)\right\}$ b/ $m = 21$.

<u>Bài tập 840.</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} xy - y^2 = 12 \\ x^2 - xy = 26 + m \end{cases} \quad (*)$

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ khi $m = 2$.

2/ Với những giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

<u>Bài tập 841.</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 = 2y + x + m \\ y^3 = 2x + y + m \end{cases} \quad (*)$ với m là tham số.

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ khi $m = 2$.

2/ Xác định các giá trị của tham số m để hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.

Trung Tâm Bồi Dưỡng Cán Bộ Y Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Bài tập 842. Tìm giá trị của a để hệ $\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+|y|=a \\ \sqrt{y^2+5}+|x|=\sqrt{x^2+5}+\sqrt{3}-a \end{cases}$ có đúng một nghiệm.

Đại học Cần Thơ khối A năm 2001

Bài tập 843. Xác định tham số m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+(m+2)x=my \\ y^2+(m+2)y=mx \end{cases}$ có đúng hai nghiệm phân biệt ?

Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Bài tập 844. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} xy+x^2=a(y-1) \\ xy+y^2=a(x-1) \end{cases}$

Cao đẳng Sư Phạm Kỹ Thuật Vinh năm 2002

Bài tập 845. Tìm các giá trị của $m<0$ để hệ $\begin{cases} x^2y+m=y^2 \\ xy^2+m=x^2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ?

Đ͟S͟: $m<0 \vee m>\dfrac{4}{27}$.

Bài tập 846. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-y+\dfrac{2}{2x-y}=3 \\ 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=3m \end{cases}$ có nghiệm ?

Đ͟S͟: $m\geq\dfrac{1}{3}$.

Bài tập 847. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ xy(x+1)(x+1)=m \end{cases}$ có ít nhất một nghiệm ?

Đ͟S͟: $-\dfrac{33}{16}\leq m\leq 16$.

Tài liệu tham khảo

① Nguyễn Văn Mậu
Phương pháp giải phương trình và bất phương trình. NXB Giáo Dục 2010
② Tạp chí Toán học và Tuổi Trẻ
③ Tuyển Tập 10 năm đề thi Olympic 30/04. NXB Giáo Dục 2006
④ Các trang wed:
Diễn đàn http: // mathscope.org
Diễn đàn http: // mathvn.com